MUSIC - *MUltiple SIgnal Classification*
ESPRIT - *Estimation of Signal Parameters via Rational Invariance Techniques*

Departamento de Eletrônica e Computação

Centro de Tecnologia

UFSM00269 – Comunicações Estratégicas

Prof. Fernando DeCastro

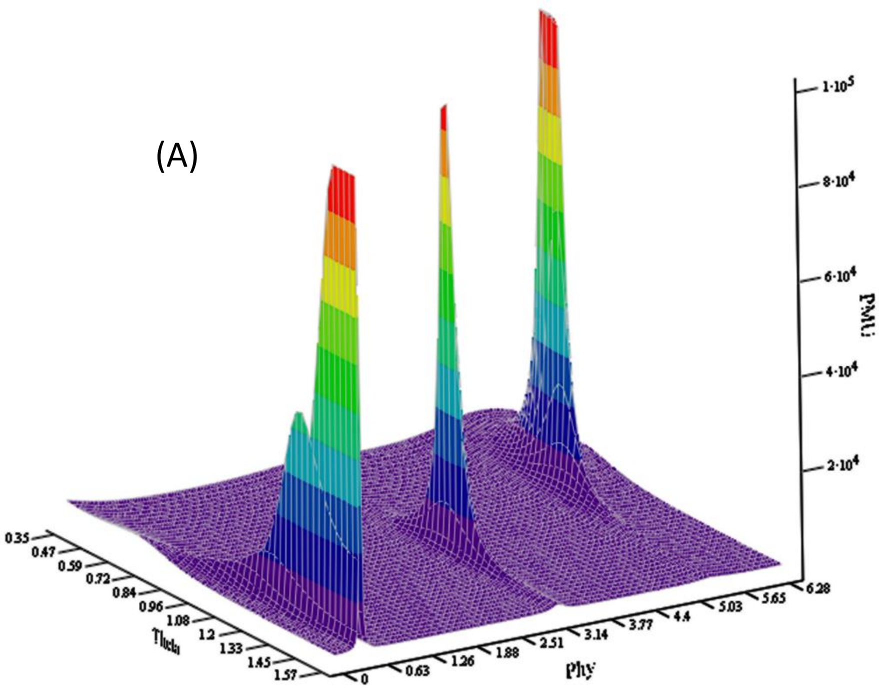
MUSIC - *MUltiple SIgnal Classification*

Nos Caps I.1, I.2, I.3 e I.4 vimos situações em que o conhecimento do DOA (*Direction Of Arrival*) de sinais-ameaça (*threat signals*) é imperativo para o sucesso das ações de ataque eletrônico (EA) e proteção eletrônica (EP). No Cap II.3 , no Exemplo 9 e no Exemplo 10, a partir do DOA de sinais de facções amigas e inimigas, vimos algoritmos para *beamforming* agindo para tornar *stealth* a operação *da base station* de um sistema de comunicações tático, minimizando a probabilidade do sinal da *base station* ser detectado pelo inimigo. A determinação do DOA de sinais é, portanto, uma ação de ES (*Electronic Support*) altamente demandada em um teatro de operações de EW.

Neste capítulo estudaremos o MUSIC (*MUltiple SIgnal Classification*), que é um algoritmo para determinação do DOA de sinais com alta precisão (o MUSIC enquadra-se na classe denominada *super-resolution*). O MUSIC opera sobre um vetor $\underline{V_T}[n] = \left[V_{T_0}[n] \quad V_{T_1}[n] \quad \cdots \quad V_{T_{K-1}}[n]\right]^T$ com cada um dos K componentes $V_{T_k}[n]$ representando a sequência de amostras resultante da digitalização do sinal de tensão medido nos terminais do respectivo k-ésimo dipolo do *array*, $k = 0,1,\cdots,K-1$.

Resumidamente, o MUSIC determina a matriz de covariância $\boldsymbol{Cov}$ da sequência de vetores $\underline{V_T}[n]$ para $n = 0,1,\cdots,Nsmp-1$, onde $Nsmp$ é número de amostras consecutivas na sequência de amostras recebido por cada dipolo usadas para montar a matriz $\boldsymbol{Cov}$ (https://pt.wikipedia.org/wiki/Matriz_de_covari%C3%A2ncia).

(A)



É efetuada então a eigendecomposição da matriz $\boldsymbol{Cov}$ (https://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalues_and_eigenvectors) e os autovetores associados aos menores autovalores (denominados autovetores de ruído) são considerados serem ortogonais ao *steering vector* de cada *m*-ésimo sinal que incide no *array* no DOA (θ_m, ϕ_m), e, por serem ortogonais, o produto escalar entre eles é nulo.

Desta maneira, o inverso da soma do produto escalar entre cada autovetor de ruído e o *steering vector* do sinal no DOA genérico (θ, ϕ) , denominado “espectro” do MUSIC, resulta em um valor infinito (na prática, muito grande) na situação em que (θ, ϕ) corresponde ao DOA de um sinal que incide no *array*, conforme veremos adiante. A determinação do DOA dos sinais que incidem no *array* equivale, portanto, a determinar para quais ângulos (θ, ϕ) a superfície do “espectro” do MUSIC apresenta máximos locais (picos), conforme mostrado em (A) ao lado para 3 sinais incidentes.

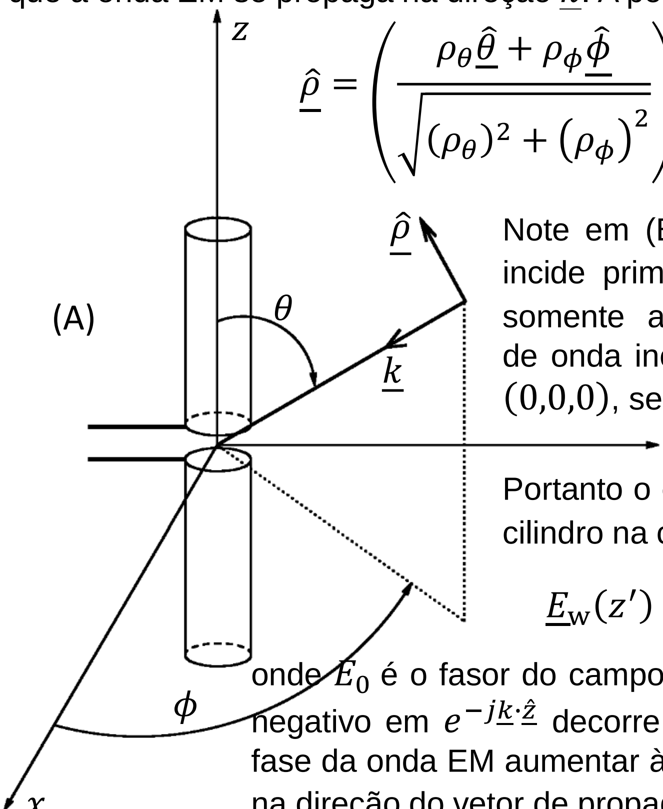
Onda EM plana incidindo em um dipolo

Para efeito de simular o desempenho do MUSIC, precisamos inicialmente modelar como o *array* de K dipolos gera o vetor de tensões $\underline{x}[n] = [x_0[n] \quad x_1[n] \quad \cdots \quad x_{K-1}[n]]^T$, com cada um dos componentes $x_k[n]$ representando a sequência de amostras resultante da digitalização do sinal de tensão medido nos terminais do respectivo k-ésimo dipolo do *array*, $k = 0,1,\cdots,K-1$. Para tanto, precisamos determinar como cada dipolo do *array* de K dipolos extrai a amplitude e a fase da onda EM plana que nele incide e a converte no fasor de tensão respectivo em seus terminais. Consideremos o dipolo cilíndrico em (A), em cuja superfície incide uma onda EM plana na direção (θ,ϕ) cujo vetor de propagação é $\underline{k} = |\underline{k}|\underline{\hat{k}}$, sendo $\underline{\hat{k}}$ o vetor unitário que define a direção de propagação da onda EM e $|\underline{k}| = k = 2\pi/\lambda$ [rad/m] é a constante de propagação que define a variação da fase da onda à medida que a onda EM se propaga na direção $\underline{\hat{k}}$. A polarização do campo elétrico da onda EM é dada pelo vetor $\underline{\hat{\rho}}$:

$$\underline{\hat{\rho}} = \left(\frac{\rho_\theta \underline{\hat{\theta}} + \rho_\phi \underline{\hat{\phi}}}{\sqrt{(\rho_\theta)^2 + (\rho_\phi)^2}} \right) \qquad (1)$$

onde os parâmetros ρ_θ e ρ_ϕ definem as componentes do campo elétrico nas direções $\underline{\hat{\theta}}$ e $\underline{\hat{\phi}}$.

(A)

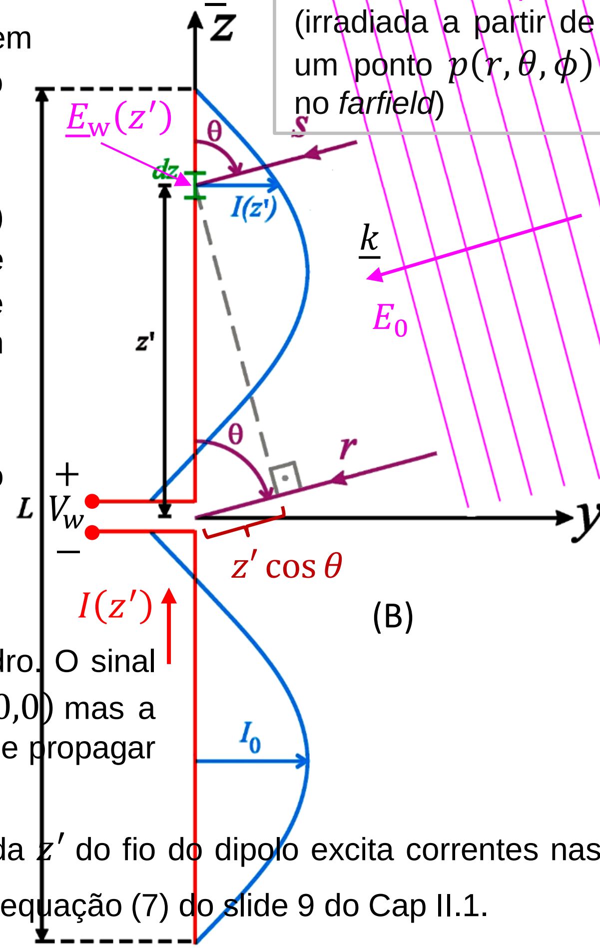


Note em (B) que cada frente de onda (em magenta) incide primeiro no segmento dz na coordenada z' e somente após percorrer a distância $z'\cos\theta$ a frente de onda incide no centro de fase do dipolo na origem $(0,0,0)$, sendo $z'\cos\theta$ a projeção de z' sobre o vetor $\underline{k}$.

Portanto o campo elétrico da onda EM na superfície do cilindro na coordenada z' é dado por:

$$\underline{E}_{\text{w}}(z') = \underline{\hat{\rho}} E_0 e^{-j\underline{k}\cdot\underline{\hat{z}}} = \underline{\hat{\rho}} E_0 e^{-jk\,z'\cos\theta} \qquad (2)$$

onde E_0 é o fasor do campo elétrico da onda EM na superfície do cilindro. O sinal negativo em $e^{-j\underline{k}\cdot\underline{\hat{z}}}$ decorre do fato de o centro de fase estar em $(0,0,0)$ mas a fase da onda EM aumentar à medida que ela se aproxima do dipolo ao se propagar na direção do vetor de propagação $\underline{k}$.

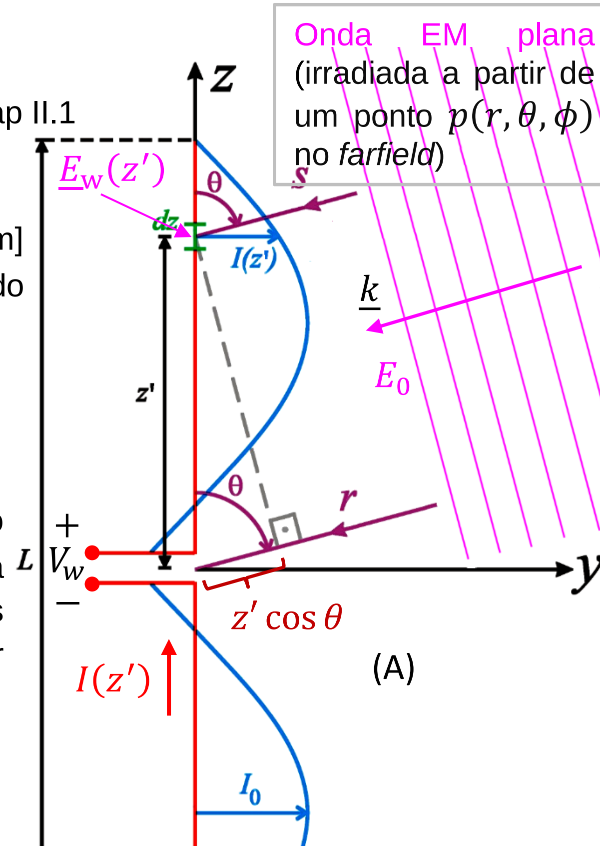


(B)

Note em (B) que o conjunto de todos os campos $\underline{E}_{\text{w}}(z')$ incidentes em cada coordenada z' do fio do dipolo excita correntes nas respectivas coordenadas z' do fio e estabelece a distribuição de corrente $I(z')$ dada pela equação (7) do slide 9 do Cap II.1.

A distribuição de corrente $I(z')$ ao longo do fio do dipolo de comprimento L em (A) abaixo varia senoidalmente com a coordenada z' em consequência de todos os campos $\underline{E}_{\mathrm{w}}(z')$ incidentes em cada coordenada z' do fio variarem senoidalmente no tempo. Como as equações de Maxwell relacionam derivadas no tempo e no espaço dos campos E[V/m] e H[A/m], e como a derivada de uma variação senoidal também resulta senoidal, a corrente $I(z')$ (que é dada pelo próprio campo H[A/m] na superfície cilíndrica do fio) **precisa** ter a forma senoidal no espaço dada pela equação (7) do slide 9 do Cap II.1 (abaixo reproduzida) para que as derivadas no tempo e no espaço nas equações de Maxwell sejam compatíveis.

$$I(z') = \begin{cases} I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} + z'\right)\right) & p/\ z' < 0 \\ I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} - z'\right)\right) & p/\ z' \geq 0 \end{cases} = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} - |z'|\right)\right) \quad [\mathrm{A}] \qquad \text{(7) – Cap II.1}$$



O produto de $\underline{E}_{\mathrm{w}}(z')$ [V/m] incidente na coordenada z' pelo tamanho do segmento dz [m] na coordenada z' define a tensão $V_{dz}(z') = \underline{E}_{\mathrm{w}}(z')dz$ [V] entre as extremidades do segmento dz. Somando todas as tensões $V_{dz}(z')$ ao longo do comprimento L:

$$V_w = -\frac{1}{I(z'=0)} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \underline{E}_{\mathrm{w}}(z') \cdot \underline{I}(z')dz' \qquad (3)$$

onde $\underline{I}(z') = I(z')\underline{\hat{z}}$, sendo $I(z')$ dado por (7) acima e sendo $\underline{\hat{z}}$ o vetor unitário do eixo cartesiano z. O sinal negativo em (3) decorre do fato de, se conectarmos uma impedância de carga Z_{T} nos terminais do dipolo a tensão gerada pela corrente $I(z'=0)$ nos terminais será negativa, i.e., $V_w = -Z_{\mathrm{T}}\, I(z'=0)$. Neste contexto, é instrutivo interpretar o papel da razão $I(z')/I(z'=0)$ em (3):

$$\frac{I(z')}{I(z'=0)} = \frac{I_0}{I(z'=0)} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} - |z'|\right)\right) \qquad (4)$$

A razão $I(z')/I(z=0)$ define a condição de contorno (i.e., o “template“ ou “molde”) de como o campo $\underline{E}_{\mathrm{w}}(z')$ induzirá tensão em cada dipolo elementar dz ao longo de z. A tensão $V_{dz}(z') = \underline{E}_{\mathrm{w}}(z')dz$ induzida em cada dipolo elementar será proporcional ao valor da corrente $I(z')$ na posição z’. Isto define um “template” porque todos os dipolos elementares têm a mesma impedância própria, logo, quanto maior a corrente $I(z')$ induzida por $\underline{E}_{\mathrm{w}}(z')$ na posição z' maior será a tensão $V_{dz}(z')$ nesta posição. A integral em (3) soma, então, ao longo de z a contribuição da tensão $V_{dz}(z')$ de todos os dipolos elementares, resultando em V_w.

Substituindo as equações (4) e (2) em (3), temos:

$$V_w = -\frac{1}{I(z'=0)}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \underline{E}_{\mathrm{w}}(z')\cdot \underline{I}(z')dz' = -\frac{1}{I(z'=0)}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \underline{E}_{\mathrm{w}}(z')\cdot I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2}-|z'|\right)\right)\underline{\hat{z}}\, dz' =$$

$$= -\frac{1}{I(z'=0)}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \underline{\hat{\rho}} E_0 e^{-jk\,z'\cos\theta}\cdot I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2}-|z'|\right)\right)\underline{\hat{z}}\, dz' =$$

$$= -\frac{E_0 I_0}{I(z'=0)}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2}-|z'|\right)\right) e^{-jk\,z'\cos\theta}\,\underline{\hat{\rho}}\cdot\underline{\hat{z}} dz'$$

Na grande maioria das situações práticas a orientação espacial do dipolo é coerente com a polarização da onda EM plana incidente, situação em que $\rho_\phi = 0$ na equação (1) do slide 3, resultando $\underline{\hat{\rho}} = \underline{\hat{\theta}}$. Nesta situação a projeção do vetor de polarização $\underline{\hat{\rho}}$ sobre a direção $\underline{\hat{z}}$ da corrente $\underline{I}(z')$ no fio do dipolo resulta $\underline{\hat{\rho}}\cdot\underline{\hat{z}} = -\cos(90°-\theta) = -\sin\theta$ (ver vetor $\underline{\hat{\rho}} = \underline{\hat{\theta}}$ em (A) ao lado). Substituindo esta condição na expressão de V_w acima, temos:

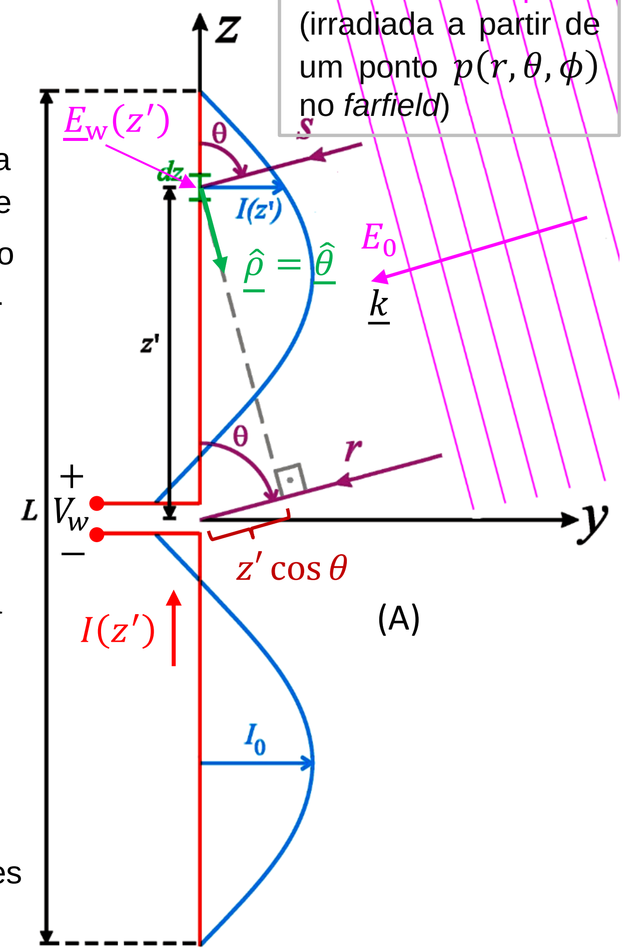
$$V_w = \frac{E_0 I_0}{I(z'=0)}\sin\theta\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2}-|z'|\right)\right) e^{-jk\,z'\cos\theta}\, dz'$$

Fazendo $z'=0$ na equação (7) do Cap II.1 no slide anterior e substituindo $I(z'=0)$ na expressão de V_w acima, temos:

$$V_w = \frac{E_0}{\sin\frac{\pi L}{\lambda}}\sin\theta\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2}-|z'|\right)\right) e^{-jk\,z'\cos\theta}\, dz'$$

Resolvendo a integral acima através de um desenvolvimento algébrico similar ao dos slides 12 e 13 do Cap II.1, obtemos o resultado em (5) no próximo slide.

Onda EM plana (irradiada a partir de um ponto $p(r,\theta,\phi)$ no *farfield*)



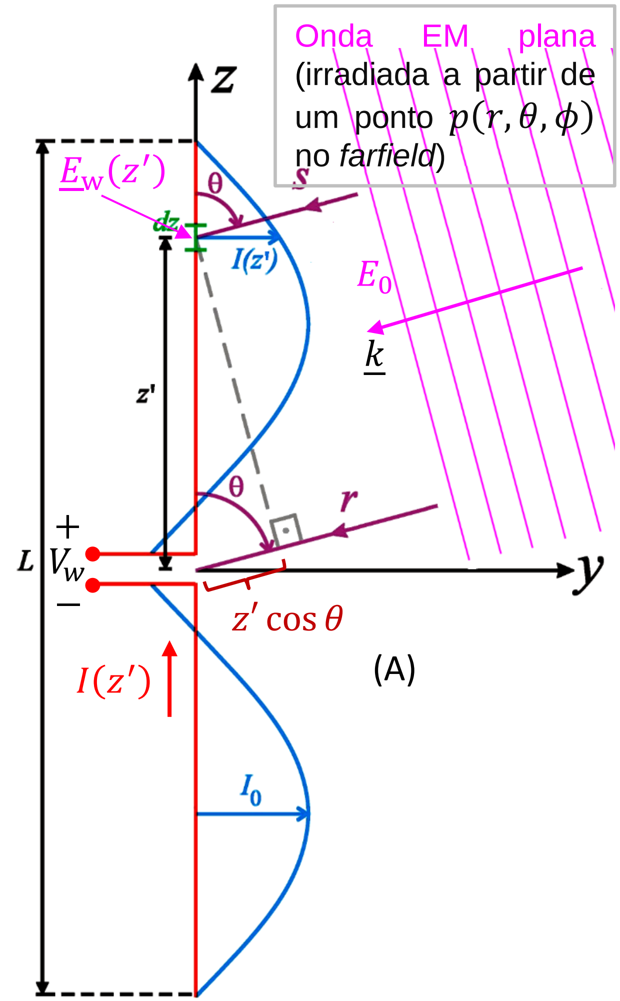
(A)

Onda EM plana incidindo em um dipolo

$$V_w = E_0 \frac{\lambda}{\pi \sin \frac{\pi L}{\lambda}} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda}\pi\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\sin\theta} \right\} \text{ [V]} \qquad (5)$$

onde θ é o DOA em que a onda EM incide no dipolo.

Note a similaridade entre a equação (5) acima, que define a tensão V_w que surge a circuito aberto nos terminais de um dipolo quando nele incide uma onda EM plana com fasor do campo elétrico E_θ dado por E_0, e a equação (18) do slide 13 do Cap II.1, que (ao ser dividida por $e^{j\omega t}$) define o fasor do campo elétrico E_θ da onda EM irradiada pelo dipolo quando o dipolo é excitado por uma corrente de radiação I_0.

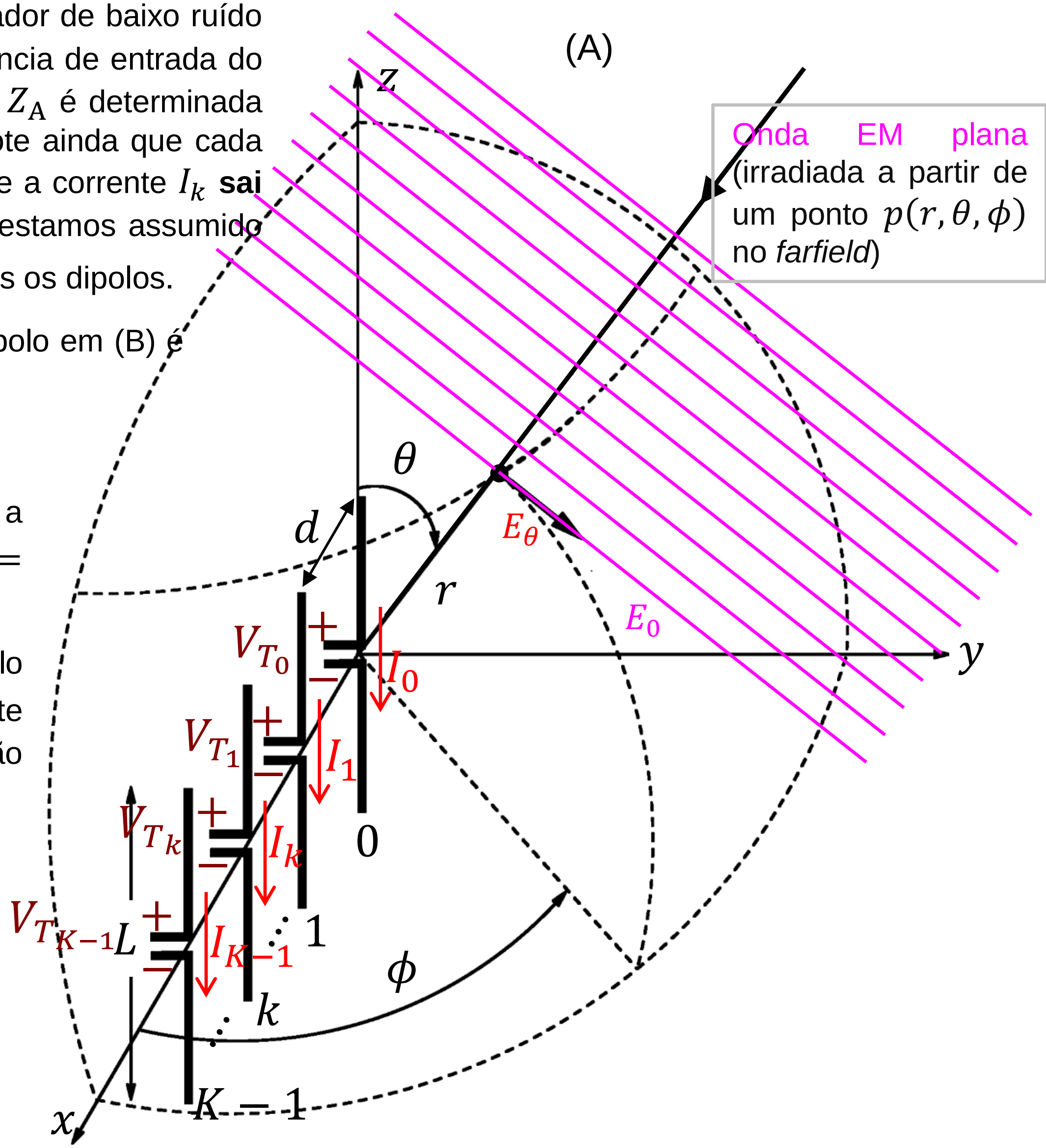


(A)

Onda EM plana incidindo em um *array* de dipolos

Consideremos um *array* (não necessariamente um ULA) com K dipolos de tamanho L e espaçados de d entre si, no qual incide uma onda EM plana na direção (θ, ϕ) sendo E_0 o fasor do campo elétrico E_θ, conforme mostrado em (A) abaixo.

Cada dipolo de impedância interna Z_A alimenta o amplificador de baixo ruído do *front end* de RF do respectivo RX, sendo Z_T a impedância de entrada do amplificador, conforme mostrado em (B) abaixo. Note que Z_A é determinada pela função Zin_Schelkunoff (ver slide 18 do Cap II.1). Note ainda que cada dipolo **entrega potência** à impedância de carga Z_T porque a corrente I_k **sai pelo terminal "+"** do k-ésimo dipolo. Note também que estamos assumido que a impedância de carga Z_T é de mesmo valor para todos os dipolos.

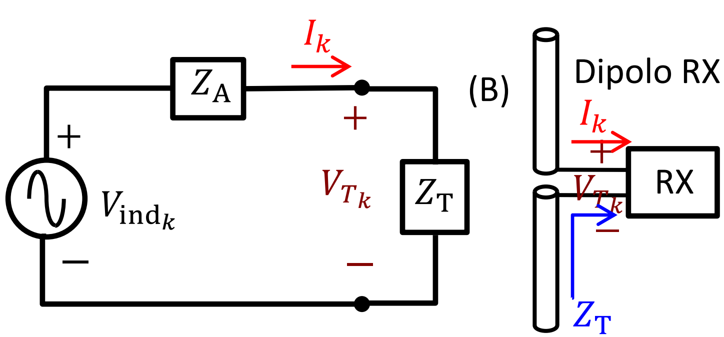


A tensão V_{ind_k} no equivalente de Thévenin do k-ésimo dipolo em (B) é dada por

$$V_{\mathrm{ind}_k} = V_{w_k} - \sum_{\ell \neq k} I_\ell Z_{k\ell} \qquad (6)$$

onde a tensão V_{w_k} é dada por (5) no slide anterior e $Z_{k\ell}$ é a impedância mútua entre os dipolos k e ℓ, com $k = 0,1,\cdots,K-1$ e $\ell = 0,1,\cdots,K-1$.

O sinal "$-$" em (6) decorre de a corrente I_ℓ sair pelo terminal **"+"** do ℓ-ésimo dipolo enquanto que a corrente $\underline{I}(z') = I(z')\underline{\hat{z}}$ que dá origem a V_{w_k} através da equação (3) do slide (4) entra pelo terminal **"+"** do k-ésimo dipolo.



Onda EM plana incidindo em um *array* de dipolos

Isolando V_{w_k} em (6):

$$V_{w_k} = V_{\text{ind}_k} + \sum_{\ell \neq k} I_\ell Z_{k\ell}$$

Do equivalente de Thévenin do k-ésimo dipolo em (B) abaixo, temos:

$$V_{\text{ind}_k} = (Z_A + Z_T) I_k$$

Substituindo V_{ind_k} na expressão de V_{w_k} acima, resulta:

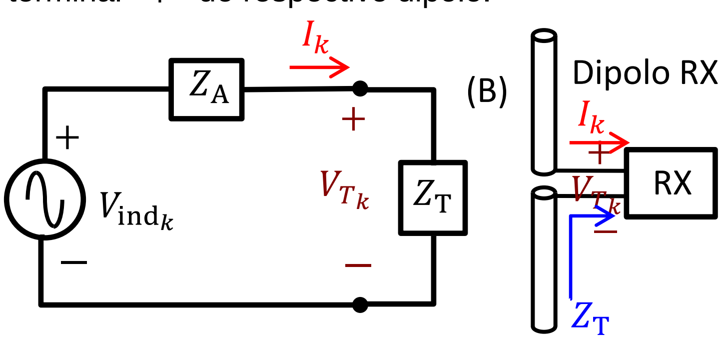
$$V_{w_k} = (Z_A + Z_T) I_k + \sum_{\ell \neq k} I_\ell Z_{k\ell} \qquad (7)$$

Reescrevendo (7) em forma matricial:

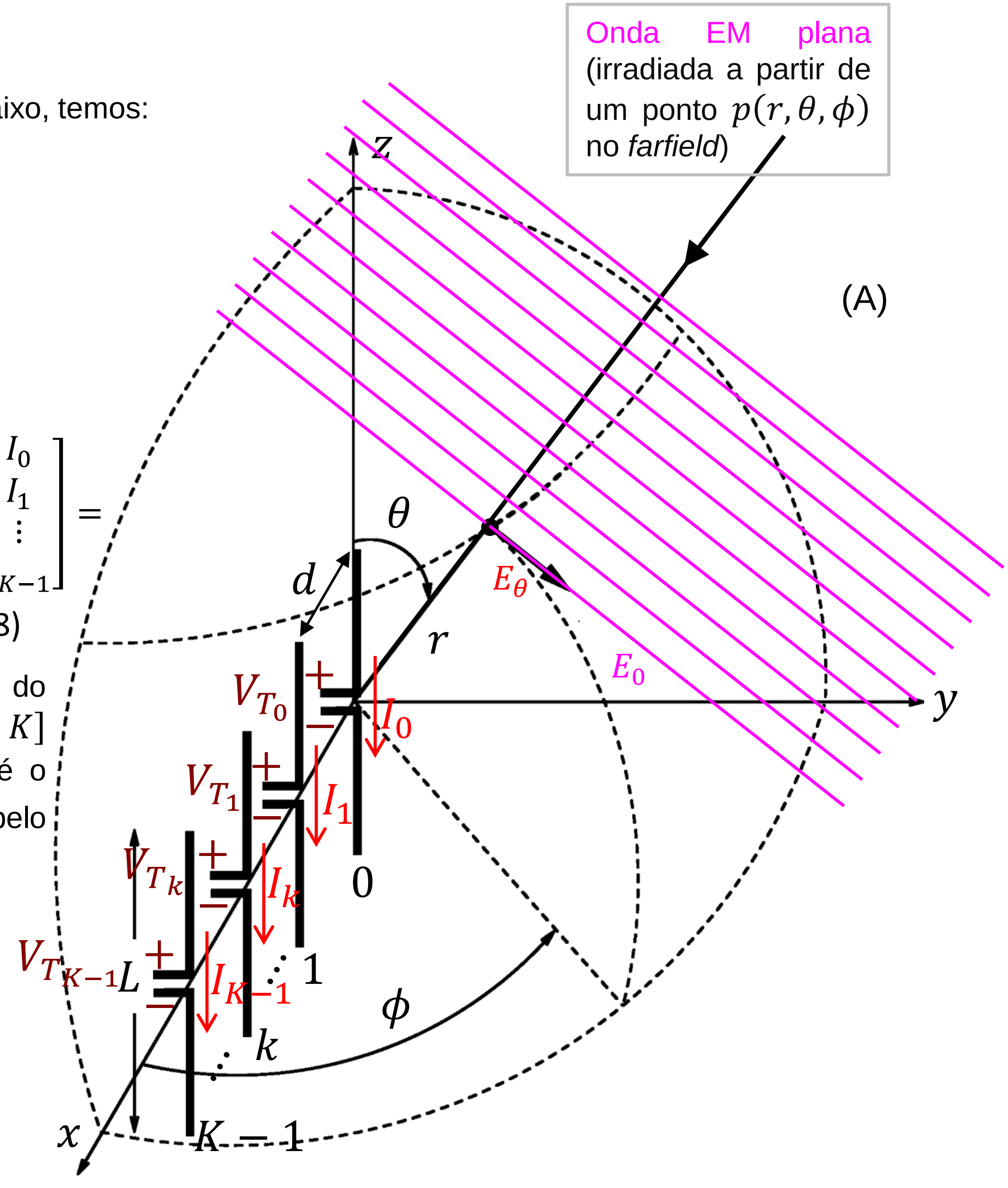
$$\underline{V_w} = \begin{bmatrix} V_{w_0} \\ V_{w_1} \\ \vdots \\ V_{w_{K-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_A + Z_T & Z_{01} & \cdots & Z_{0(K-1)} \\ Z_{10} & Z_A + Z_T & \cdots & Z_{1(K-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{(K-1)0} & Z_{(K-1)1} & \cdots & Z_A + Z_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ \vdots \\ I_{K-1} \end{bmatrix} =$$

$$= (\mathbf{Z} + Z_T \mathbf{I}) \underline{I_{\text{out}}} \qquad (8)$$

onde $\mathbf{Z}[K \times K]$ é a matriz impedância entre os dipolos do *array*, Z_T é a impedância de carga de cada dipolo, $\mathbf{I}[K \times K]$ é a matriz identidade, e $\underline{I_{\text{out}}} = [I_0 \quad I_1 \quad \cdots \quad I_{K-1}]^T$ é o vetor cujos componentes representam a corrente que sai pelo terminal **"+"** do respectivo dipolo.



(B)



Onda EM plana incidindo em um *array* de dipolos

Resolvendo (8) para $\underline{I_{\text{out}}} = [I_0 \quad I_1 \quad \cdots \quad I_{K-1}]^T$:

$$\underline{I_{\text{out}}} = (\mathbf{Z} + Z_T\mathbf{I})^{-1}\underline{V_w} \qquad (9)$$

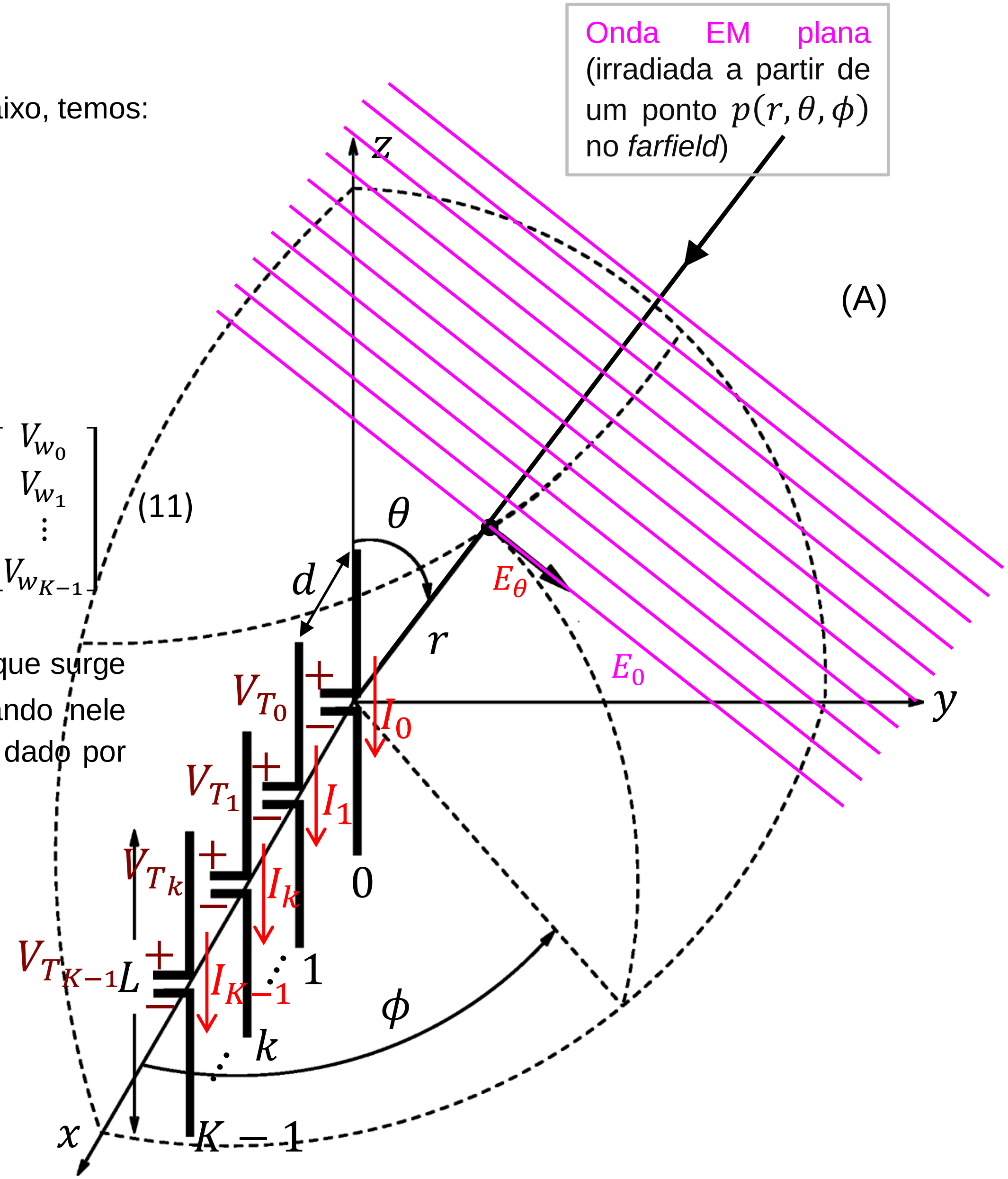
Do equivalente de Thévenin do k-ésimo dipolo em (B) abaixo, temos:

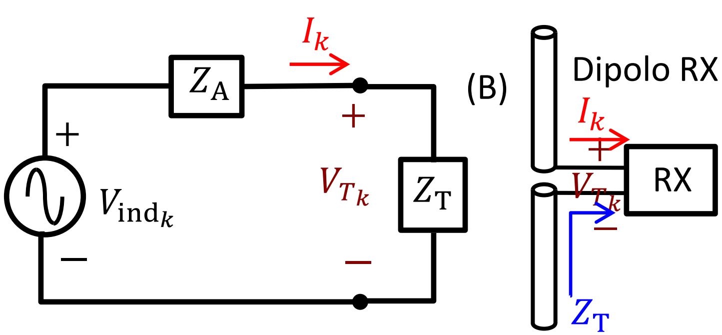
$$\underline{V_T} = \begin{bmatrix} V_{T_0} \\ V_{T_1} \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}} \end{bmatrix} = Z_T\,\underline{I_{\text{out}}} = Z_T \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ \vdots \\ I_{K-1} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Substituindo (9) em (10):

$$\underline{V_T} = \begin{bmatrix} V_{T_0} \\ V_{T_1} \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}} \end{bmatrix} = Z_T(\mathbf{Z} + Z_T\mathbf{I})^{-1}\underline{V_w} = Z_T(\mathbf{Z} + Z_T\mathbf{I})^{-1} \begin{bmatrix} V_{w_0} \\ V_{w_1} \\ \vdots \\ V_{w_{K-1}} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

onde V_{w_k} é dada por (5) do slide 6, sendo V_{w_k} a tensão que surge a circuito aberto nos terminais do k-ésimo dipolo quando nele incide uma onda plana com fasor do campo elétrico E_θ dado por E_{0_k}, estando o dipolo isolado no espaço livre.

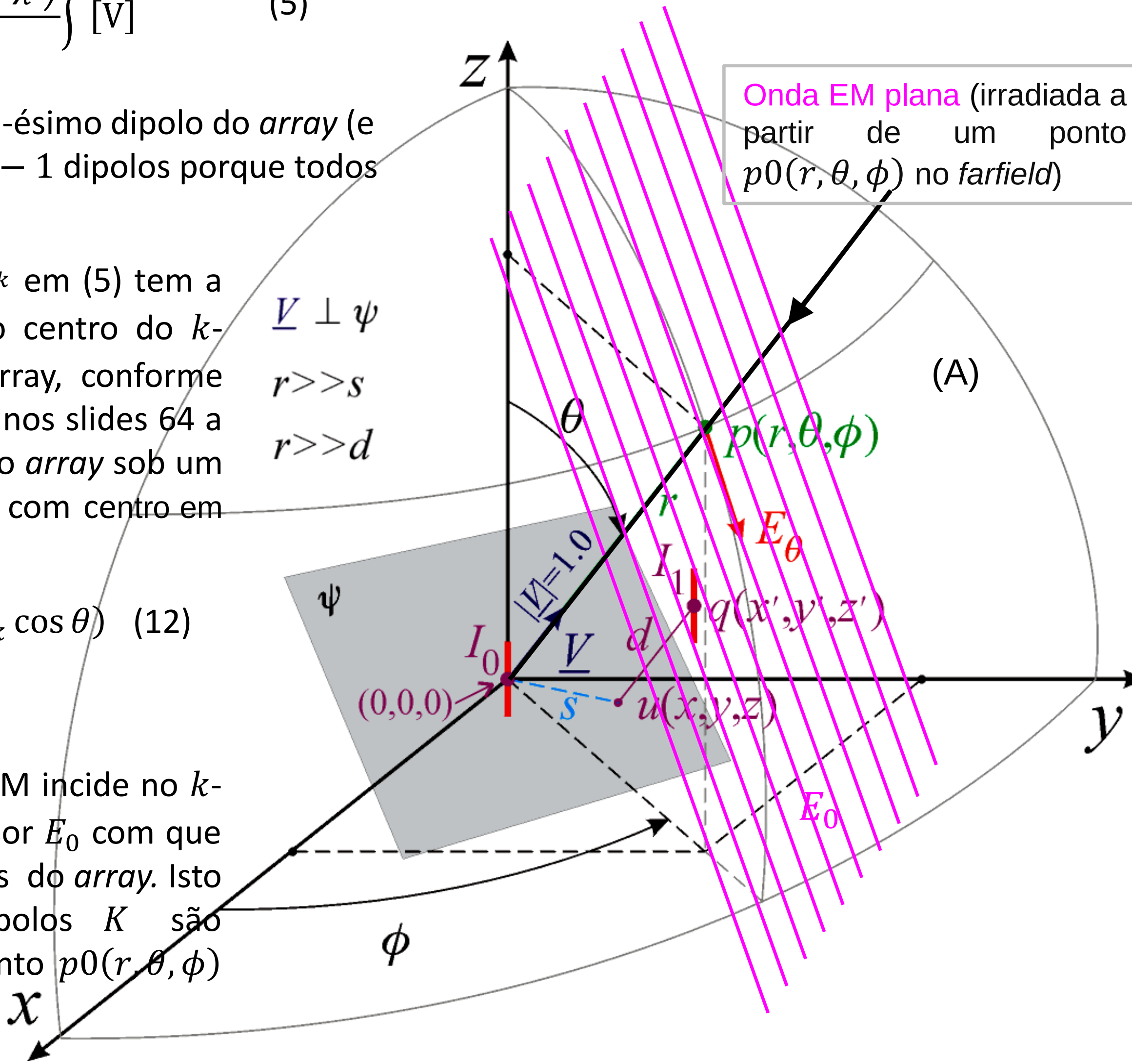




A tensão V_{w_k} que surge a circuito aberto nos terminais do k-ésimo dipolo do *array* (estando o dipolo isolado no espaço livre) quando nele incide uma onda EM plana com fasor do campo elétrico E_θ dado por $E_{0_k} = |E_{0_k}| e^{j\angle E_{0_k}}$ é dada por (5) do slide 6, abaixo reproduzida:

$$V_{w_k} = E_{0_k} \frac{\lambda}{\pi \sin \frac{\pi L}{\lambda}} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda}\pi \cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\sin\theta} \right\} \text{ [V]} \qquad (5)$$

onde θ é o DOA em que a onda EM incide no k-ésimo dipolo do *array* (e que é o mesmo DOA θ para todos os demais $K-1$ dipolos porque todos os K dipolos do *array* são paralelos ao eixo z).



Ocorre que o campo elétrico $E_{0_k} = |E_{0_k}| e^{j\angle E_{0_k}}$ em (5) tem a sua fase $\angle E_{0_k}$ dependente da distância d do centro do k-ésimo dipolo ao plano ψ de fase zero do array, conforme mostrado em (A) ao lado e conforme discutido nos slides 64 a 68 do Cap II.2. Uma onda EM plana incidente no *array* sob um DOA (θ, ϕ) incide no k-ésimo dipolo do *array* com centro em (x_k, y_k, z_k) tendo uma fase $\angle E_{0_k}$ dada por

$$\angle E_{0_k} = \frac{2\pi}{\lambda}(x_k \sin\theta\cos\phi + y_k \sin\theta \sin\phi + z_k \cos\theta) \qquad (12)$$

(rever discussão nos slides 64 a 68 do Cap II.2)

Note que a magnitude $|E_{0_k}|$ com que a onda EM incide no k-ésimo dipolo é a mesma magnitude $|E_0|$ do fasor E_0 com que a onda incide em todos os demais $K-1$ dipolos do *array*. Isto ocorre porque as distâncias entre os dipolos K são insignificantes em relação à distância r ao ponto $p0(r,\theta,\phi)$ no *farfield,* de onde a onda EM é irradiada.

Onda EM plana incidindo em um *array* de dipolos

Incluindo em (5) o giro de fase $\angle E_{0_k}$ dado por (12) que a onda EM incidente no *array* sob um DOA (θ, ϕ) exibe ao incidir no dipolo do *array* com centro em (x_k, y_k, z_k) , e adicionalmente considerando que $\left|E_{0_k}\right| = |E_0|$, temos:

$$V_{w_k} = E_0 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_k \sin\theta\cos\phi + y_k \sin\theta\sin\phi + z_k\cos\theta)} \frac{\lambda}{\pi \sin\frac{\pi L}{\lambda}} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda}\pi\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\sin\theta} \right\} \text{ [V]} \qquad (13)$$

Substituindo (13) em (11):

$$\underline{V_T} = \begin{bmatrix} V_{T_0} \\ V_{T_1} \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}} \end{bmatrix} = Z_T(\mathbf{Z} + Z_T\mathbf{I})^{-1} \begin{bmatrix} E_0 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_0 \sin\theta\cos\phi + y_0 \sin\theta\sin\phi + z_0\cos\theta)} \frac{\lambda}{\pi \sin\frac{\pi L}{\lambda}} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda}\pi\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\sin\theta} \right\} \\ E_0 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 \sin\theta\cos\phi + y_1 \sin\theta\sin\phi + z_1\cos\theta)} \frac{\lambda}{\pi \sin\frac{\pi L}{\lambda}} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda}\pi\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\sin\theta} \right\} \\ \vdots \\ E_0 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_{K-1} \sin\theta\cos\phi + y_{K-1} \sin\theta\sin\phi + z_{K-1}\cos\theta)} \frac{\lambda}{\pi \sin\frac{\pi L}{\lambda}} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda}\pi\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\sin\theta} \right\} \end{bmatrix}$$

Que pode ser simplificada para a forma:

$$\underline{V_T} = \begin{bmatrix} V_{T_0} \\ V_{T_1} \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}} \end{bmatrix} = Z_T(\mathbf{Z} + Z_T\mathbf{I})^{-1} \frac{\lambda}{\pi \sin\frac{\pi L}{\lambda}} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda}\pi\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\sin\theta} \right\} \begin{bmatrix} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_0 \sin\theta\cos\phi + y_0 \sin\theta \sin\phi + z_0\cos\theta)} \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 \sin\theta\cos\phi + y_1 \sin\theta \sin\phi + z_1\cos\theta)} \\ \vdots \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_{K-1} \sin\theta\cos\phi + y_{K-1} \sin\theta \sin\phi + z_{K-1}\cos\theta)} \end{bmatrix} E_0$$

Ou ainda simplificada para a forma:

$$\underline{V_T} = \\ = \underbrace{(Z_T + Z_A)(\mathbf{Z} + Z_T\mathbf{I})^{-1}}_{\mathbf{Cpl}} \frac{Z_T}{(Z_T + Z_A)} \underbrace{\frac{\lambda}{\pi \sin\frac{\pi L}{\lambda}} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda}\pi\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\sin\theta} \right\} \begin{bmatrix} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_0 \sin\theta\cos\phi + y_0 \sin\theta \sin\phi + z_0\cos\theta)} \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 \sin\theta\cos\phi + y_1 \sin\theta \sin\phi + z_1\cos\theta)} \\ \vdots \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_{K-1} \sin\theta\cos\phi + y_{K-1} \sin\theta \sin\phi + z_{K-1}\cos\theta)} \end{bmatrix}}_{\underline{S_v}(\theta,\phi)} E_0$$

$$\underline{V_T} = \begin{bmatrix} V_{T_0} \\ V_{T_1} \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}} \end{bmatrix} = \frac{Z_T}{(Z_T + Z_A)} \mathbf{Cpl}\, \underline{S_v}(\theta,\phi)\, E_0 \qquad (14)$$

$$\mathbf{Cpl} = (Z_T + Z_A)(\mathbf{Z} + Z_T\mathbf{I})^{-1} \qquad (15)$$

$$\underline{S_v}(\theta,\phi) = \frac{\lambda}{\pi \sin\frac{\pi L}{\lambda}} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda}\pi\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\sin\theta} \right\} \begin{bmatrix} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_0 \sin\theta\cos\phi + y_0 \sin\theta \sin\phi + z_0\cos\theta)} \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 \sin\theta\cos\phi + y_1 \sin\theta \sin\phi + z_1\cos\theta)} \\ \vdots \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_{K-1} \sin\theta\cos\phi + y_{K-1} \sin\theta \sin\phi + z_{K-1}\cos\theta)} \end{bmatrix} \qquad (16)$$

onde:

- E_0 é o fasor do campo elétrico E_θ da onda EM que incide no *array* sob um DOA (θ, ϕ).
- $\mathbf{Cpl}[K \times K]$ é a matriz de acoplamento do *array*. Note em (15) que se não há acoplamento entre os dipolos, as impedâncias mútuas fora da diagonal da matriz $\mathbf{Z}$ são nulas e $\mathbf{Z}$ se torna uma matriz diagonal com elementos de valor Z_A na diagonal determinados pela função Zin_Schelkunoff – ver slide 18 do Cap II.1). Nesta situação $\mathbf{Cpl}$ simplifica para uma matriz identidade.
- $\underline{S_v}(\theta, \phi)$ é o *steering vector* da onda EM que incide no *array* na direção (θ, ϕ) com magnitude e fase dada pelo fasor E_0. Note a semelhança de (16) com a equação (28) no slide 126 do Cap II.3.

Onda EM plana incidindo em um *array* de dipolos

Para o caso em que M ondas EM incidem no *array* respectivamente sob um DOA (θ_m, ϕ_m), com $m = 0,1 \cdots M-1$, tendo cada m-ésima onda EM um fasor do campo elétrico E_θ dado por E_{0_m}, a equação (14) é generalizada para:

$$\underline{V_T} = \begin{bmatrix} V_{T_0} \\ V_{T_1} \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}} \end{bmatrix} = \frac{Z_T}{(Z_T + Z_A)} \mathbf{Cpl\ SvM} \begin{bmatrix} E_{0_0} \\ E_{0_1} \\ \vdots \\ E_{0_{M-1}} \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\mathbf{SvM} = \begin{bmatrix} \underline{S_v}(\theta_0, \phi_0) & \underline{S_v}(\theta_1, \phi_1) & \cdots & \underline{S_v}(\theta_{M-1}, \phi_{M-1}) \end{bmatrix} \tag{18}$$

onde $\mathbf{SvM}[K \times M]$ é a matriz de *steering vectors* em que cada m-ésima coluna corresponde ao *steering vector* $\underline{S_v}(\theta_m, \phi_m)$ dado por (16).

Ocorre que a onda EM é inevitavelmente corrompida por ruído aditivo Gaussiano branco ao se propagar através do canal de transmissão (ver slides 27 e 28 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapI.pdf). Para contemplar esta situação, (17) é reescrita como

$$\underline{V_T} = \begin{bmatrix} V_{T_0} \\ V_{T_1} \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}} \end{bmatrix} = \frac{Z_T}{(Z_T + Z_A)} \mathbf{Cpl\ SvM} \begin{bmatrix} E_{0_0} \\ E_{0_1} \\ \vdots \\ E_{0_{M-1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{K-1} \end{bmatrix} \tag{19}$$

onde η_k é o sinal de ruído recebido do canal de transmissão pelo k-ésimo dipolo do *array* de K dipolos, $k = 0,1 \cdots K-1$. Explicitando em (19) as sequências de amostras em banda-base no domínio tempo discreto n, temos:

$$\underline{V_T}[n] = \begin{bmatrix} V_{T_0}[n] \\ V_{T_1}[n] \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}}[n] \end{bmatrix} = \frac{Z_T}{(Z_T + Z_A)} \mathbf{Cpl\ SvM} \begin{bmatrix} E_{0_0}[n] \\ E_{0_1}[n] \\ \vdots \\ E_{0_{M-1}}[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_0[n] \\ \eta_1[n] \\ \vdots \\ \eta_{K-1}[n] \end{bmatrix} \tag{20}$$

A *eigen*-decomposição da matriz de covariância da sequência de vetores $\underline{V_T}[n]$

Para uma sequência de $NSmpl$ vetores $\underline{V_T}[n]$, com $n = 0,1 \cdots NSmpl - 1$, a matriz de covariância $\boldsymbol{Cov}$ $[K \times K]$ da sequência $\underline{V_T}[n]$ é obtida através de :

$$\underline{V_m} = \frac{1}{NSmpl} \sum_{n=0}^{NSmpl-1} \underline{V_T}[n] \tag{21}$$

$$\boldsymbol{Cov} = \frac{1}{NSmpl} \sum_{n=0}^{NSmpl-1} \left(\underline{V_T}[n] - \underline{V_m}\right)\left(\underline{V_T}[n] - \underline{V_m}\right)^H \tag{22}$$

onde $(\cdot)^H$ é o operador que retorna o conjugado transposto de seu vetor-argumento. Daí, os K *eigenvalues* (autovalores) e os K respectivos *eigenvectors* (autovetores) da matriz de covariância $\boldsymbol{Cov}$ são determinados (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalues_and_eigenvectors) resultando:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{K-1} \end{bmatrix} = \text{eigenvals}(\boldsymbol{Cov}) \tag{23}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_{00} & U_{01} & & \cdots & U_{0(K-1)} \\ U_{10} & U_{11} & & \cdots & U_{1(K-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{(K-1)0} & U_{(K-1)1} & \cdots & & U_{(K-1)(K-1)} \end{bmatrix} = [\underline{U_0} \quad \underline{U_1} \quad \cdots \quad \underline{U_{K-1}}] = \text{eigenvec}(\boldsymbol{Cov}) \tag{24}$$

onde a k-ésima coluna $\underline{U_k}$ da matriz $\mathbf{U}[K \times K]$ é o autovetor $\underline{U_k} = \begin{bmatrix} U_{0k} \\ U_{1k} \\ \vdots \\ U_{(K-1)k} \end{bmatrix}$ associado ao autovalor λ_k, sendo $k = 0,1 \cdots K-1$. As K componentes de cada autovetor $\underline{U_k}$ são valores no domínio complexo $\mathbb{C}$. Os K autovetores tem módulo unitário, i.e., $\underline{U_k}^H \cdot \underline{U_k} = \left|\underline{U_k}\right|^2 = 1$ e são ortogonais entre si, i.e, $\underline{U_\ell}^H \cdot \underline{U_k} = 0$, sendo $\ell \neq k$. Note, portanto, que os K autovetores formam uma **base ortogonal de vetores unitários** no domínio complexo $\mathbb{C}^K$, definindo K eixos cartesianos.

A *eigen*-decomposição da matriz de covariância da sequência de vetores $\underline{V_T}[n]$

Se projetarmos cada vetor $\underline{V_T}[n]$ da sequência de $NSmpl$ vetores (após subtrair o vetor média $\underline{V_m}$) sobre cada um dos K eixos cartesianos definidos pelos respectivos autovetores $\underline{U_k}$, obteremos uma sequência de $NSmpl$ projeções $\underline{\mathrm{Proj}}[n]$ sobre cada um dos K eixos, onde $n = 0{,}1 \cdots NSmpl - 1$ e $k = 0{,}1 \cdots K - 1$:

$$\underline{\mathrm{Proj}}[n] = \underline{U_k}^H \cdot \underline{V_T}[n] \tag{25}$$

Se determinarmos a potência Pot_k da sequência de $NSmpl$ projeções em cada respectivo k-ésimo eixo cartesiano, observaremos que $Pot_k = \lambda_k$, conforme veremos no Exemplo 1 do slide 18:

$$Pot_k = \frac{1}{NSmpl} \sum_{n=0}^{NSmpl-1} \left|\mathrm{Proj}_{k,n}\right|^2 = \lambda_k \tag{26}$$

O fato de a potência Pot_k da sequência de $NSmpl$ projeções no respectivo k-ésimo eixo cartesiano ser igual ao autovalor λ_k associado ao autovetor $\underline{U_k}$ que dá a direção do eixo sugere a seguinte interpretação para a *eigen*-decomposição da matriz $\boldsymbol{Cov}$:

Dentre as M ondas EM incidentes no *array*, a m-ésima onda EM incidindo sob um DOA (θ_m, ϕ_m) gera um autovalor λ_m que indica com que "intensidade" os vetores da m-ésima classe de vetores semelhantes entre si e implícitos na sequência de $NSmpl$ vetores $\underline{V_T}[n]$ (após subtrair o vetor média $\underline{V_m}$) se alinham com o respectivo eixo cartesiano definido pelo autovetor $\underline{U_m}$, sendo $m = 0{,}1 \cdots M - 1$. Os vetores da m-ésima classe de vetores são consequência da m-ésima onda EM incidente, e, por esta razão, mantêm coerência (correlação) temporal consigo mesmo. Portanto, os vetores da m-ésima classe se alinham preferencialmente com os respectivos M eixos cartesianos $\underline{U_m}$ que mais fielmente os representam, sendo a "intensidade" com que os vetores da m-ésima classe se alinham com o eixo $\underline{U_m}$ medida pelo correspondente autovalor λ_m. Já o ruído branco Gaussiano do canal, também implícito na sequência de vetores em $\underline{V_T}[n]$ (ver equação (20) do slide 13), é descorrelacionado consigo mesmo por ser aleatório e branco. Portanto, o sinal de ruído não se alinha preferencialmente a qualquer eixo cartesiano $\underline{U_k}$ particular, alinhando-se e distribuindo-se uniformemente em todos os K eixos cartesianos.

Como a relação-sinal ruído SNR no canal deve ser suficientemente alta para que os sinais sejam demodulados, a consequência é que a potência do ruído é significativamente menor que a do sinal. Portanto, os autovalores λ_ℓ associados aos $K - M$ eixos cartesianos $\underline{U_\ell}$ aos quais somente o ruído se alinha serão muito menores que os autovalores λ_m associados aos M eixos cartesianos $\underline{U_m}$ aos quais respectivamente se alinham os sinais das M ondas EM que incidem no *array*, sendo $\ell = M, M + 1 \cdots K - 1$.

A *eigen*-decomposição da matriz de covariância da sequência de vetores $\underline{V_T}[n]$

A discussão no slide anterior nos leva ao conceito de ***signal eigenvector*** (autovetor de sinal) e ***noise eigenvector*** (autovetor de ruído):

Signal eigenvector $\underline{Es_m}$: Autovetor ao qual se alinha a m-ésima classe de vetores semelhantes entre si e implícitos na sequência de $NSmpl$ vetores $\underline{V_T}[n]$ (após subtrair o vetor média $\underline{V_m}$), classe que representa um dos M sinais transportados pelas respectivas M ondas EM que incidem no *array,* sendo $m = 0,1 \cdots M-1$.

Noise eigenvector $\underline{En_\ell}$: Autovetor ortogonal a qualquer uma das M classes de vetores semelhantes entre si e implícitos na sequência de $NSmpl$ vetores $\underline{V_T}[n]$ (após subtrair o vetor média $\underline{V_m}$), classes que respectivamente representam os M sinais transportados pelas respectivas M ondas EM que incidem no *array,* sendo $\ell = M, M+1 \cdots K-1$. Um *noise eigenvector* é identificado pelo autovalor λ_ℓ associado que, conforme discutido no slide anterior, é muito menor que os autovalores λ_m associados aos *signal eigenvectors* $\underline{U_m}$ que definem a direção dos M eixos cartesianos aos quais respectivamente se alinham os sinais das M ondas EM que incidem no *array.*

Importante notar nas equações (17) e (18) do slide 13 que a m-ésima classe de vetores semelhantes entre si e implícitos na sequência de $NSmpl$ vetores $\underline{V_T}[n]$ (após subtrair o vetor média $\underline{V_m}$) é explicitada na combinação linear do produto entre os M *steering vectors* $\underline{S_v}(\theta_m, \phi_m)$ e a matriz de acoplamento $\mathbf{Cpl}$ ponderados pelos fasores E_{0_m} da respectiva m-ésima onda EM que incide no *array* no DOA (θ_m, ϕ_m):

$$\underline{V_T} = \begin{bmatrix} V_{T_0} \\ V_{T_1} \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}} \end{bmatrix} = \frac{Z_T}{(Z_T + Z_A)} \Big[\underbrace{E_{0_0} \mathbf{Cpl}\, \underline{S_v}(\theta_0, \phi_0)}_{\text{classe } 0} + \underbrace{E_{0_1} \mathbf{Cpl}\, \underline{S_v}(\theta_1, \phi_1)}_{\text{classe } 1} + \cdots + \underbrace{E_{0_{M-1}} \mathbf{Cpl}\, \underline{S_v}(\theta_{M-1}, \phi_{M-1})}_{\text{classe } M-1} \Big] \qquad (27)$$

Portanto, como cada *noise eigenvector* $\underline{En_\ell}$ é ortogonal a qualquer uma das M classes de vetores (= M subespaços) que se projetam com maior "intensidade" sobre o respectivo eixo cartesiano definido pelo autovetor $\underline{U_m}$, então, cada *noise eigenvector* $\underline{En_\ell}$ é ortogonal a cada um dos produtos $\mathbf{Cpl}\, \underline{S_v}(\theta_m, \phi_m)$ em (27).

A determinação do DOA através do MUSIC:

A ortogonalidade entre os *noise eigenvectors* $\underline{En}_\ell$ e o produto $\mathbf{Cpl}\,\underline{S_v}(\theta_m,\phi_m)$ implica ser nulo o resultado do produto escalar entre o *noise eigenvector* $\underline{En}_\ell$ e o produto $\mathbf{Cpl}\,\underline{S_v}(\theta_m,\phi_m)$, sendo $m=0,1\cdots M-1$ e $\ell=M,M+1\cdots K-1$:

$$\left[\mathbf{Cpl}\,\underline{S_v}(\theta_m,\phi_m)\right]^H\cdot\underline{En}_\ell=0 \tag{28}$$

Como o produto escalar em (28) resulta zero nos DOAs (θ_m,ϕ_m) das M ondas EM que incidem no *array*, o seu inverso resulta um valor infinito para (θ_m,ϕ_m), e daí podemos definir a função $\mathrm{PMU}(\theta,\phi)$, denominada "espectro" do MUSIC, que resulta em um valor infinito (na prática, muito grande) na situação em que (θ,ϕ) corresponde ao DOA (θ_m,ϕ_m) de uma das M ondas EM que incidem no *array*:

$$\mathrm{PMU}(\theta,\phi)=\frac{1}{\left|\underline{\rho}\,(\theta,\phi)\right|^2} \tag{29}$$

$$\underline{\rho}\,(\theta,\phi)=\left[\left[\mathbf{Cpl}\,\underline{S_v}(\theta,\phi)\right]^H\cdot\mathbf{En}\right]^{\boldsymbol{T}} \tag{30}$$

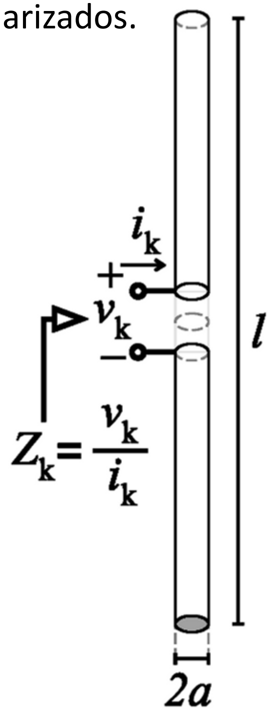
onde $\underline{\rho}\,(\theta,\phi)$ é um vetor coluna com $\mathrm{NnoiseEigV}=K-M$ componentes e onde $\mathbf{En}\;[K\times\mathrm{NnoiseEigV}]$ é a matriz cujas colunas correspondem aos $\mathrm{NnoiseEigV}$ *noise eigenvectors.* Cada um dos $\mathrm{NnoiseEigV}$ *noise eigenvectors* é identificado pelo autovalor λ_ℓ associado que, conforme a discussão no slide 15, é muito menor que os autovalores λ_m associados aos autovetores $\underline{U}_m$ que definem a direção dos M eixos cartesianos aos quais respectivamente se alinham os sinais das M ondas EM que incidem no *array.*

A determinação do DOA (θ_m,ϕ_m), dos sinais das M ondas EM que incidem no *array* consiste em determinar para quais ângulos (θ,ϕ) a superfície $\mathrm{PMU}(\theta,\phi)$ apresenta máximos locais (picos).

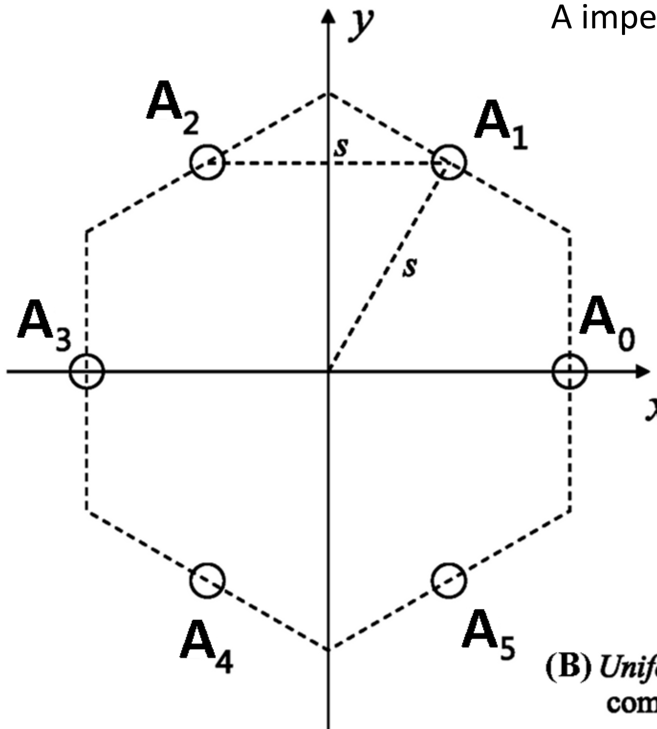
A determinação do DOA através do MUSIC:

Exemplo 1: Consideremos o *phased-array* do tipo *Uniform Circular Array* (UCA) mostrado em (B), operando em f_o = 850MHz e constituído por 6 dipolos cilíndricos de tamanho l = 0.5λ e de raio *a*=5mm conforme (A), separados entre si de *s*=0.25λ, sendo λ o comprimento de onda em f_o. O plano *xy* é paralelo ao plano do solo de modo que os dipolos são verticalmente polarizados.

A impedância de carga de cada dipolo é $Z_T = 50$ [Ω].



(A) Geometria do dipolo usado no *array* mostrado em (B).



Coordenadas do centro do dipolo A_k, k = 0,1,⋯ 5

- A_0: (s, 0 , 0)
- A_1: ($s$cos60°, $s$sen60°, 0)
- A_2: (-$s$cos60°, $s$sen60°, 0)
- A_3: (-s, 0, 0)
- A_4: (-$s$cos60°, -$s$sen60°, 0)
- A_5: ($s$cos60°, -$s$sen60°, 0)

(B) *Uniform Circular Array* (UCA) com 6 dipolos idênticos ao mostrado em (A) e coordenadas do centro de cada dipolo.

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} & Z_{03} & Z_{04} & Z_{05} \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} \\ Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} & Z_{25} \\ Z_{30} & Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} & Z_{35} \\ Z_{40} & Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & Z_{45} \\ Z_{50} & Z_{51} & Z_{52} & Z_{53} & Z_{54} & Z_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}$$

(C) Relação entre tensões e correntes nos dipolos do UCA mostrado em (B). Z_{mn} é a impedância mútua entre os dipolos A_m e A_n. Z_{nn} é a impedância própria do dipolo A_n.

A determinação do DOA através do MUSIC:

Um conjunto de ondas EM originadas em transmissores localizados em coordenadas distintas incidem no UCA com amplitudes Mag relativas e DOAs (θ, ϕ) conforme tabela em (A). Os transmissores utilizam modulação 16-QAM com um alfabeto da modulação dado pelo mapa IQSymbolMap em (B) , sendo cada um dos 16 símbolos IQ em IQSymbolMap mapeado em uma palavra de 4 bits (ver https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapIV.pdf) .

(A)

Mag:	DOA θ:	DOA ϕ:
1.0	45°	315°
0.7	62°	180°
0.5	71°	20°

(B)

$$\text{IQSymbolMap} = \begin{pmatrix} -3+3i & -1+3i & 1+3i & 3+3i \\ -3+i & -1+i & 1+i & 3+i \\ -3-i & -1-i & 1-i & 3-i \\ -3-3i & -1-3i & 1-3i & 3-3i \end{pmatrix}$$

Para efeito de eficiência espectral, como é usual em qualquer sistema digital, os transmissores adotam um *scrambler* na entrada do modulador (*energy dispersal scrambler* - ver https://en.wikipedia.org/wiki/Scrambler) que torna aleatória e uniforme a distribuição dos símbolos IQ na sequência de símbolos IQ extraídos do mapa IQSymbolMap em função da sequência de palavras binárias de 4 bits na entrada do *scrambler*, sequência que corresponde à informação digital a ser transmitida pelo transmissor.

As tensões nos terminais dos 6 dipolos resultantes da incidência das ondas EM são digitalizadas e convertidas para banda-base pelos respectivos receptores (RX) do *array* de dipolos e são armazenadas no vetor $\underline{V_T}[n] = \begin{bmatrix} V_{T_0}[n] \\ V_{T_1}[n] \\ \vdots \\ V_{T_5}[n] \end{bmatrix}$.

Uma sequência de $NSmpl = 2000$ vetores $\underline{V_T}[n]$, $n = 0,1 \cdots NSmpl - 1$, é processada pelo algoritmo MUSIC para efeito de determinar o DOA (θ, ϕ) das ondas EM incidentes.

A determinação do DOA através do MUSIC:

Pede-se: (a) Determine e plote a constelação das 6 sequências de símbolos IQ armazenadas em $\underline{V_T}[n]$ caso não houvesse ruído no canal ($SNR = \infty$). **(b)** Determine e plote a constelação das 6 sequências de símbolos IQ armazenadas em $\underline{V_T}[n]$ sabendo que a relação sinal-ruído do canal no local onde o UCA situa-se é $SNR = 15$ [dB]. **(c)** Determine a matriz de covariância $\boldsymbol{Cov}$ da sequência de vetores $\underline{V_T}[n]$ e efetue a sua *eigen*-decomposição. **(d)** Verifique a ortogonalidade entre autovetores da matriz $\boldsymbol{Cov}$ e o módulo unitário de cada um deles. **(e)** Efetue a projeção da sequência de $NSmpl$ vetores $\underline{V_T}[n]$ sobre cada um dos 6 eixos cartesianos da base ortonormal formada pelos autovetores de $\boldsymbol{Cov}$, determine a potência de cada uma das 6 projeções e verifique a correspondência com os respectivos autovalores. **(f)** Determine os auto vetores de ruído da matriz $\boldsymbol{Cov}$. **(g)** Determine o espectro $\mathrm{PMU}(\theta,\phi)$ resultante do processamento efetuado pelo algoritmo MUSIC. Plote em um gráfico 3D a superfície $\mathrm{PMU}(\theta,\phi)$ e, adicionalmente, plote a superfície $\mathrm{PMU}(\theta,\phi)$ em um gráfico de contornos. Verifique se os máximos locais de $\mathrm{PMU}(\theta,\phi)$ ocorrem nos DOAs (θ_m,ϕ_m) das M ondas EM que incidem no *array*, $m = 0,1 \cdots M-1$.

O *script* do software MathCad utilizado na solução deste exemplo está disponível em http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/E1S18(MUSIC_UCA6D)_R1.zip.

Solução:

$f := 850 \cdot MHz$ → freqüência de operação $\lambda := \frac{c}{f}$ $\lambda = 0.353\,m$ → comprimento de onda da onda eletromagnética

$ZT := 50 \cdot \Omega$ → impedância de carga de cada um dos 6 dipolos do array

$SNR := 15$ [dB] → Relação sinal-ruído no canal de transmissão

$NSmpl := 2000$ → Número de amostras em banda-base (símbolos IQ) recebidas por dipolo

DOAs (θ,ϕ) e magnitude relativa Mag das ondas EM planas que incidem no UCA moduladas em 16-QAM:

$$DOA := \begin{pmatrix} 45\cdot° & 315\cdot° \\ 62\cdot° & 180\cdot° \\ 71\cdot° & 20\cdot° \end{pmatrix} \qquad Mag := \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.7 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

→ amplitudes das ondas EM são distintas em razão das condições de propagação distintas no canal de transmissão

$M := rows(DOA) = 3$ → Número de ondas EM planas que incidem no UCA.

$L := 0.5 \cdot \lambda$ → tamanho dos dipolos

$R := 5 \cdot mm$ → raio do dipolo cilíndrico

$\beta := \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = 17.815 \cdot \frac{rad}{m}$ → constante de propagação da onda EM

$s := 0.25 \cdot \lambda$ → espaçamento entre dipolos

$$C := \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ s\cdot\cos(60deg) & s\cdot\sin(60deg) & 0 \\ -s\cdot\cos(60deg) & s\cdot\sin(60deg) & 0 \\ -s & 0 & 0 \\ -s\cdot\cos(60deg) & -s\cdot\sin(60deg) & 0 \\ s\cdot\cos(60deg) & -s\cdot\sin(60deg) & 0 \end{pmatrix} \rightarrow C = \begin{pmatrix} 0.088 & 0 & 0 \\ 0.044 & 0.076 & 0 \\ -0.044 & 0.076 & 0 \\ -0.088 & 0 & 0 \\ -0.044 & -0.076 & 0 \\ 0.044 & -0.076 & 0 \end{pmatrix} m$$

→ coordenadas do centro de cada um dos 6 dipolos do UCA.

$K := rows(C) = 6$ → número de dipolos do *array*

A determinação do DOA através do MUSIC:

(a) Matriz impedância entre os dipolos do *array*:

$$aa := 0..K-1 \quad bb := 0..K-1 \qquad D_{aa,bb} := \sqrt{\left[\left(C^{\langle 0\rangle}\right)_{aa}-\left(C^{\langle 0\rangle}\right)_{bb}\right]^2+\left[\left(C^{\langle 1\rangle}\right)_{aa}-\left(C^{\langle 1\rangle}\right)_{bb}\right]^2+\left[\left(C^{\langle 2\rangle}\right)_{aa}-\left(C^{\langle 2\rangle}\right)_{bb}\right]^2}$$

$$Z_{aa,bb} := \mathrm{if}\left(aa = bb, \mathrm{Zin\_Schelkunoff}\left(\frac{R}{mm},\frac{\lambda}{m},\frac{L}{m}\right), \mathrm{ZMutual\_Schelkunoff}\left(\frac{L}{m},\frac{L}{m},\frac{R}{mm},\frac{R}{mm},\frac{D_{aa,bb}}{m},\frac{\lambda}{m}\right)\right)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 78.517+45.679i & 47.016-32.68i & -0.772-41.449i & -14.447-34.501i & -0.772-41.449i & 47.016-32.68i \\ 47.016-32.68i & 78.517+45.679i & 47.016-32.68i & -0.772-41.449i & -14.447-34.501i & -0.772-41.449i \\ -0.772-41.449i & 47.016-32.68i & 78.517+45.679i & 47.016-32.68i & -0.772-41.449i & -14.447-34.501i \\ -14.447-34.501i & -0.772-41.449i & 47.016-32.68i & 78.517+45.679i & 47.016-32.68i & -0.772-41.449i \\ -0.772-41.449i & -14.447-34.501i & -0.772-41.449i & 47.016-32.68i & 78.517+45.679i & 47.016-32.68i \\ 47.016-32.68i & -0.772-41.449i & -14.447-34.501i & -0.772-41.449i & 47.016-32.68i & 78.517+45.679i \end{pmatrix}\cdot\Omega$$

Steering vector Sv(θ,ϕ) - equação (16) do slide 12 do Cap II.6:

$$Sv(\theta,\phi) := \frac{\lambda}{\pi\cdot\sin\left(\frac{\beta\cdot L}{2}\right)}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\beta\cdot L}{2}\cdot\cos(\theta)\right)-\cos\left(\frac{\beta\cdot L}{2}\right)}{\sin(\theta)}\cdot\begin{bmatrix} e^{j\cdot\left[\beta\cdot\left(\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\cdot C_{0,0}+\sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot C_{0,1}+\cos(\theta)\cdot C_{0,2}\right)\right]} \\ e^{j\cdot\left[\beta\cdot\left(\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\cdot C_{1,0}+\sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot C_{1,1}+\cos(\theta)\cdot C_{1,2}\right)\right]} \\ e^{j\cdot\left[\beta\cdot\left(\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\cdot C_{2,0}+\sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot C_{2,1}+\cos(\theta)\cdot C_{2,2}\right)\right]} \\ e^{j\cdot\left[\beta\cdot\left(\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\cdot C_{3,0}+\sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot C_{3,1}+\cos(\theta)\cdot C_{3,2}\right)\right]} \\ e^{j\cdot\left[\beta\cdot\left(\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\cdot C_{4,0}+\sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot C_{4,1}+\cos(\theta)\cdot C_{4,2}\right)\right]} \\ e^{j\cdot\left[\beta\cdot\left(\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\cdot C_{5,0}+\sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot C_{5,1}+\cos(\theta)\cdot C_{5,2}\right)\right]} \end{bmatrix}$$

A determinação do DOA através do MUSIC:

Matriz do acoplamento Cpl - equação (15) do slide 12 do Cap II.6:

$ZA := Z_{0,0}$ $\rightarrow$ impedância própria dos $K = 6$ dipolos do UCA

$$Cpl := (ZT + ZA)\cdot(Z + ZT\cdot \text{identity}(K))^{-1}$$

$$Cpl = \begin{pmatrix} 0.866-0.327i & -0.256+0.333i & 0.012+0.035i & -0.048+0.032i & 0.012+0.035i & -0.256+0.333i \\ -0.256+0.333i & 0.866-0.327i & -0.256+0.333i & 0.012+0.035i & -0.048+0.032i & 0.012+0.035i \\ 0.012+0.035i & -0.256+0.333i & 0.866-0.327i & -0.256+0.333i & 0.012+0.035i & -0.048+0.032i \\ -0.048+0.032i & 0.012+0.035i & -0.256+0.333i & 0.866-0.327i & -0.256+0.333i & 0.012+0.035i \\ 0.012+0.035i & -0.048+0.032i & 0.012+0.035i & -0.256+0.333i & 0.866-0.327i & -0.256+0.333i \\ -0.256+0.333i & 0.012+0.035i & -0.048+0.032i & 0.012+0.035i & -0.256+0.333i & 0.866-0.327i \end{pmatrix}$$

Constelação 16-QAM do sinal transportado por cada onda EM:

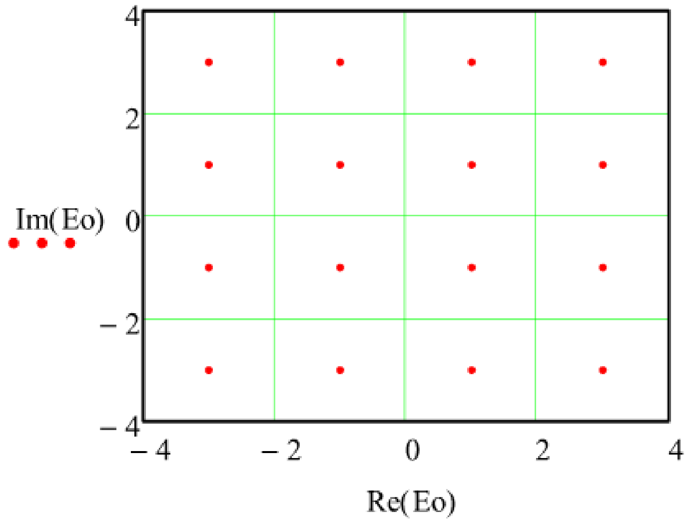
$$A := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad ii := 0..3 \qquad jj := 0..3 \qquad IQSymbolMap_{ii,jj} := A_{3-jj} + j\cdot A_{ii}$$

$$IQSymbolMap = \begin{pmatrix} -3+3i & -1+3i & 1+3i & 3+3i \\ -3+i & -1+i & 1+i & 3+i \\ -3-i & -1-i & 1-i & 3-i \\ -3-3i & -1-3i & 1-3i & 3-3i \end{pmatrix}$$

A determinação do DOA através do MUSIC:

Geração da sequência de amostras em banda-base transportadas pelas $M = 3$ ondas EM planas que incidem no UCA moduladas pela sequência de $NSmpl = 2000$ símbolos IQ 16-QAM:

$n := 0..NSmpl - 1 \qquad \_m := 0..M - 1 \qquad Eo_{\_m,n} := IQSymbolMap_{round(rnd(3)),round(rnd(3))} \cdot \frac{V}{m}$



→ constelação de símbolos IQ 16-QAM gerada nos $M = 3$ TXs que dão origem às respectivas ondas EM moduladas pelas respectivas sequências de símbolos IQ.

Amplitude de cada onda EM: $Eo_{\_m,n} := Mag_{\_m} \cdot Eo_{\_m,n}$

Sequênca de amostras em banda-base transportadas por cada uma das $M = 3$ ondas EM planas que incidem no UCA:

Eo =

	0	1	2	3	4	5
0	-1+3i	-1-i	-1-i	-1-i	-3+3i	-3-3i
1	-0.7+2.1i	0.7+0.7i	-2.1+0.7i	0.7+2.1i	0.7+0.7i	0.7-2.1i
2	0.5+0.5i	-1.5-0.5i	-1.5-0.5i	-0.5-0.5i	-0.5-0.5i	...

$\cdot \frac{V}{m}$

A determinação do DOA através do MUSIC:

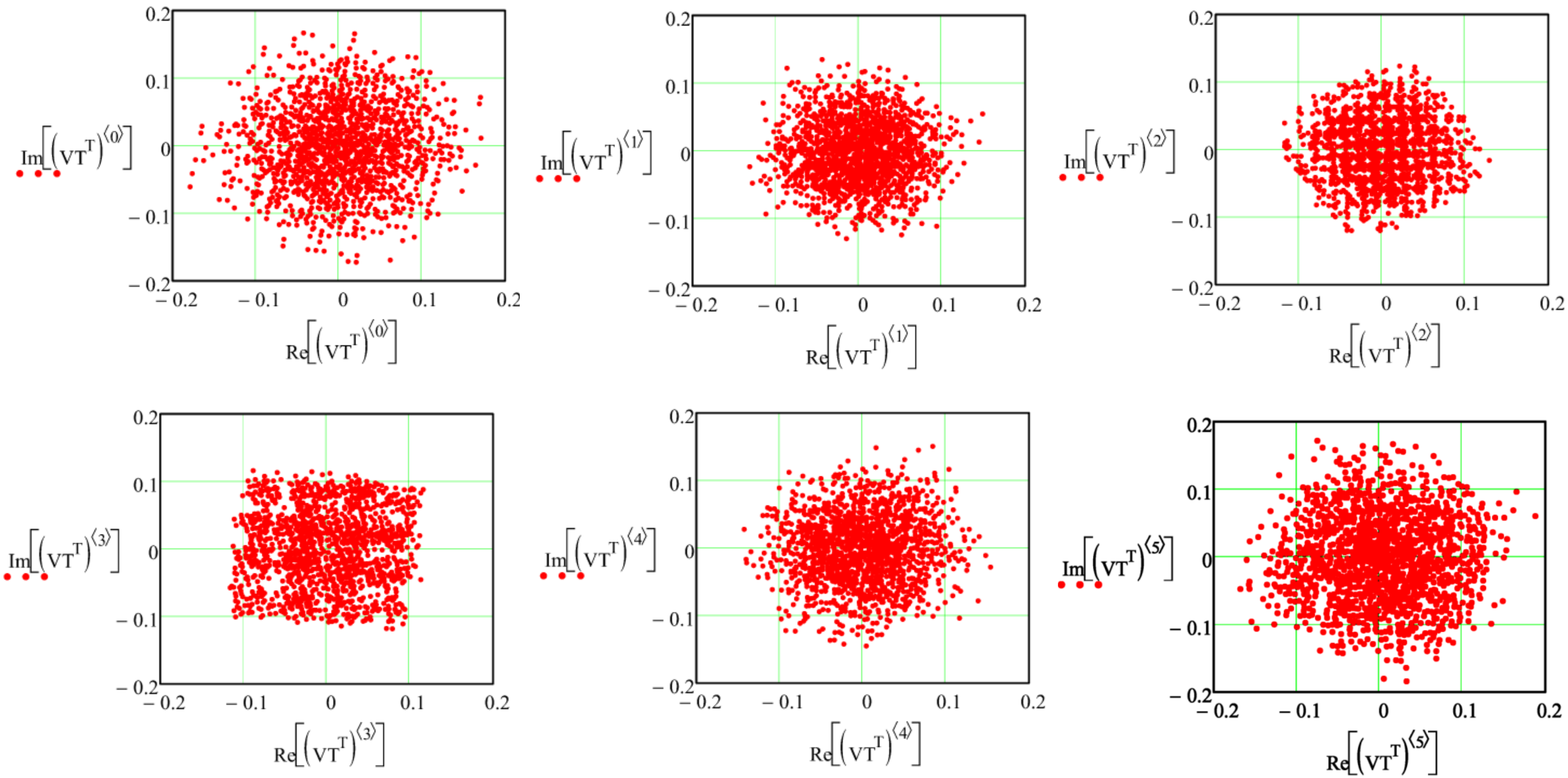
$$SvM^{\langle \_m \rangle} := Sv\left(DOA_{\_m,0}, DOA_{\_m,1}\right)$$

→ matriz de *steering vectors* - equação (18) do slide 13 do Cap II.6

$$VT := \frac{ZT}{ZT + ZA} \cdot Cpl \cdot SvM \cdot Eo$$

→ VT é o vetor em que cada componente é a sequência de amostras da tensão digitalizada em banda-base nos terminais do repectivo dipolo - equação (17) do slide 13 do Cap II.6.

Plotando a constelação de símbolos IQ recebidas nos terminais VT de cada um dos $K = 6$ dipolos:

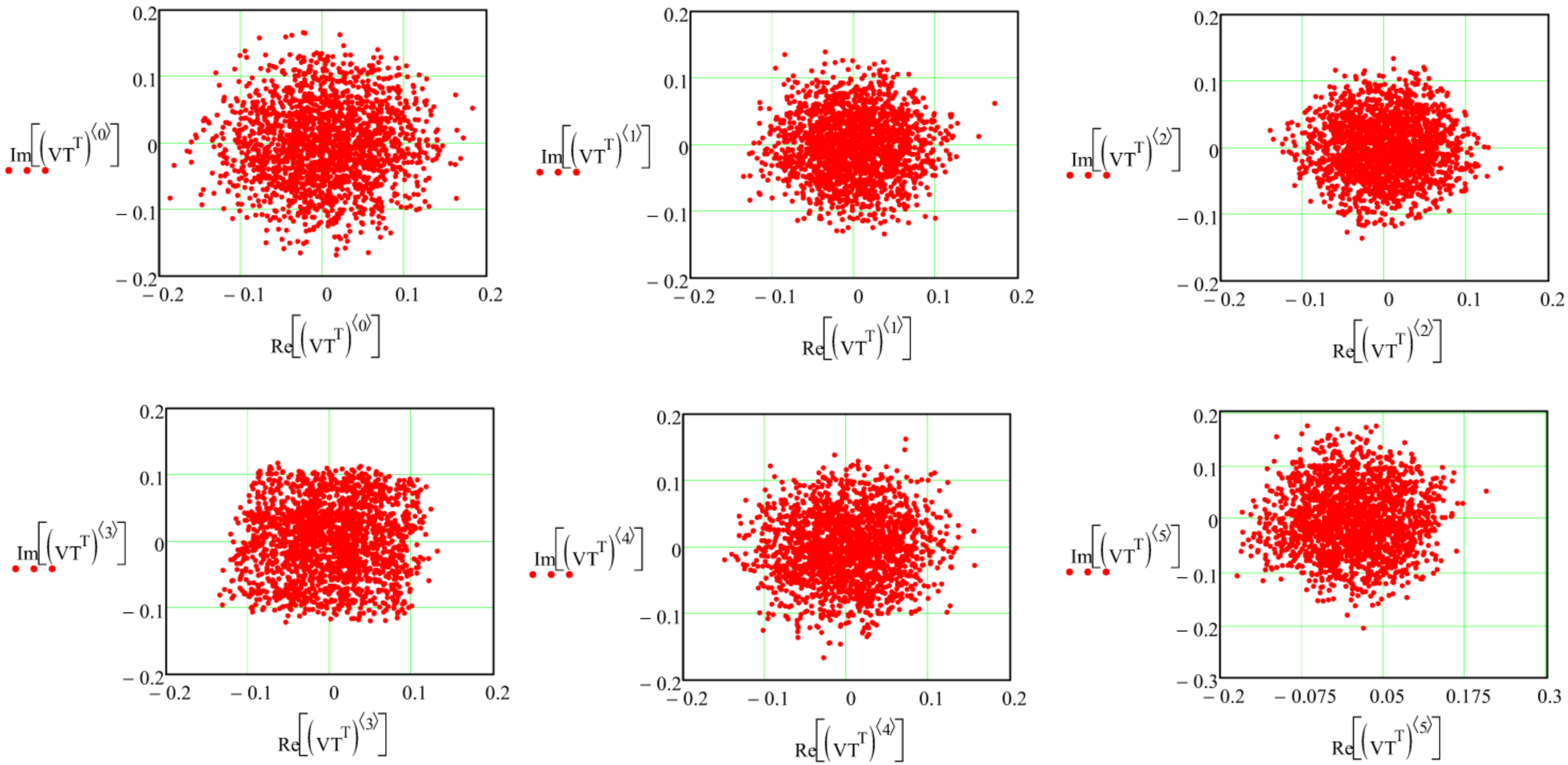


A determinação do DOA através do MUSIC:

(b) Adicionando às tensões do vetor VT o ruído gaussiano do canal de modo que a relação sinal -ruído seja $\mathrm{SNR} = 15$ [dB]:

$\mathrm{VT} := \mathrm{AWGN}(\mathrm{VT}, \mathrm{SNR})$ → equação (20) do slide 13 do Cap II.6

Plotando a constelação de símbolos IQ recebidas nos terminais VT de cada um dos $K = 6$ dipolos após a adição do ruído gaussiano do canal:



A determinação do DOA através do MUSIC:

(c) Construindo a matriz de covariância Cov da sequência de vetores $VT^{\langle n\rangle}$:

$$Vm := \frac{1}{NSmpl}\cdot\sum_{n=0}^{NSmpl-1} VT^{\langle n\rangle} = \begin{pmatrix} 2.117-1.769i \\ 0.115-1.647i \\ 0.622+0.681i \\ -0.998+1.329i \\ 0.299-1.075i \\ 2.483-3.082i \end{pmatrix}\cdot mV$$

→ Vetor média Vm da sequência de vetores $VT^{\langle n\rangle}$ - equação (21) do slide 14 do Cap II.6

Extraindo o vetor média Vm da sequência de vetores $VT^{\langle n\rangle}$:

$$VT^{\langle n\rangle} := VT^{\langle n\rangle} - Vm$$

Matriz de covariância Cov da sequência de vetores $VT^{\langle n\rangle}$:

$$Cov := \frac{1}{NSmpl}\cdot\sum_{n=0}^{NSmpl-1}\left[\left(VT^{\langle n\rangle}\right)\cdot\left(\overline{VT^{\langle n\rangle}}\right)^{T}\right]$$

→ equação (22) do slide 14 do Cap II.6

$$10^{3}\cdot Cov = \begin{pmatrix} 7.04 & 2.85+2.31i & -2.14+1.82i & -0.9+1.38i & 0.58+1.66i & 3.95+0.01i \\ 2.85-2.31i & 4.4 & -0.98+0.23i & -2.05-0.82i & -0.29-2.34i & 1.33-0.44i \\ -2.14-1.82i & -0.98-0.23i & 4.19 & 2.18-2.82i & 2.75+0.44i & 0.06+1.06i \\ -0.9-1.38i & -2.05+0.82i & 2.18+2.82i & 5.9 & 2.55+2.08i & -3.57-0.28i \\ 0.58-1.66i & -0.29+2.34i & 2.75-0.44i & 2.55-2.08i & 5.23 & 1-1.73i \\ 3.95-0.01i & 1.33+0.44i & 0.06-1.06i & -3.57+0.28i & 1+1.73i & 7.69 \end{pmatrix}\cdot V^{2}$$

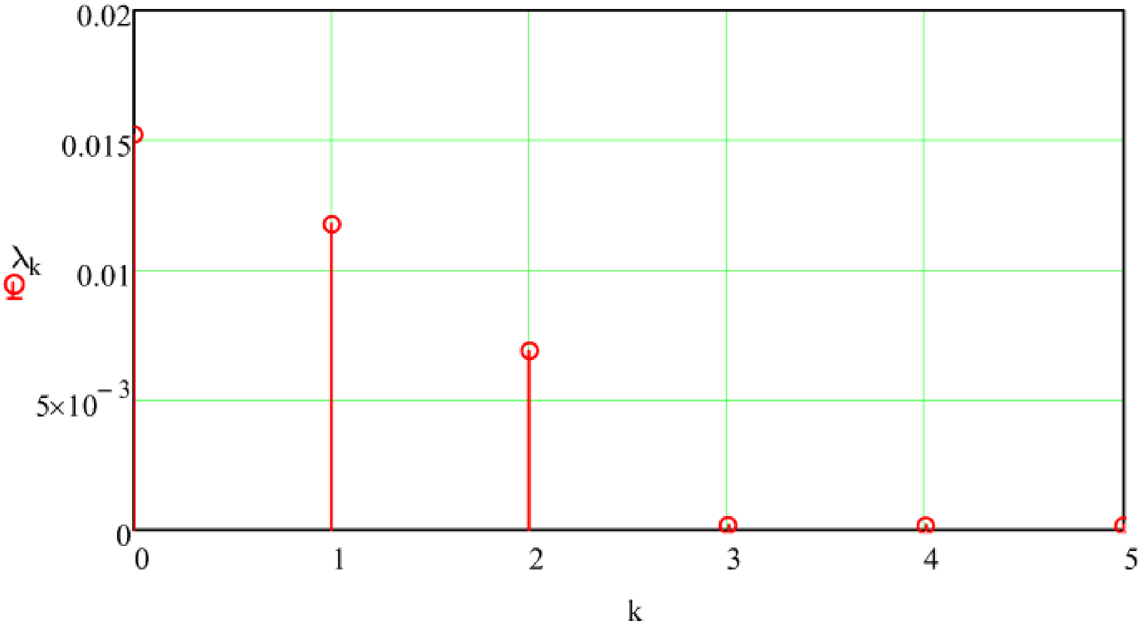
A determinação do DOA através do MUSIC:

Autovalores λ_k da matriz Cov: $k := 0..K-1 \quad ka := 0..K-1$

$$\lambda_k := \text{eigenvals}(\text{Cov})_{K-k-1} \rightarrow 10^3 \cdot \lambda = \begin{pmatrix} 15.234 \\ 11.775 \\ 6.909 \\ 0.187 \\ 0.176 \\ 0.173 \end{pmatrix} \cdot V^2$$

$\rightarrow$ equação (23) do slide 14 do Cap II.6

Gráfico do espectro de autovalores λ_k. Note os últimos $\text{NnoiseEigV} := 3$ valores de λ_k insignificantes aproximadamente iguais, o que indica haver $\text{NnoiseEigV} = 3$ *noise eigevectors* e portanto $K - \text{NnoiseEigV} = 3$ sinais incidentes (ajustar manualmente o valor de NnoiseEigV no início do parágrafo acima a partir da inspeção visual do gráfico do espectro de autovalores λ_k abaixo - ver discussão no slide 16 do Cap II.6).



A determinação do DOA através do MUSIC:

Autovetores $U^{\langle k\rangle}$ da matriz Cov (equação (24) do slide 14 do Cap II.6):

$$U_{k,ka} := \mathrm{eigenvec}\left(\mathrm{Cov}, \lambda_{ka}\right)_k \rightarrow$$

$$U = \begin{pmatrix} -0.474 + 0.237i & 0.307 + 0.238i & -0.341 - 0.122i & -0.124 - 0.553i & -0.085 - 0.32i & 0.074 + 0.019i \\ -0.245 + 0.132i & 0.142 - 0.309i & -0.48 + 0.154i & 0.229 + 0.107i & 0.513 + 0.446i & 0.123 + 0.108i \\ 0.293 - 0.124i & 0.349 - 0.031i & 0.213 + 0.334i & 0.382 - 0.495i & -0.237 + 0.26i & 0.18 + 0.266i \\ 0.475 + 0.066i & 0.223 + 0.34i & -0.177 - 0.144i & 0.049 - 0.152i & 0.252 + 0.17i & -0.095 - 0.653i \\ 0.166 + 3.962i \times 10^{-3} & 0.582 - 0.052i & 0.173 - 0.266i & 0.029 + 0.352i & 0.238 - 0.381i & 0.423 + 0.156i \\ -0.519 + 0.117i & 0.321 + 6.873i \times 10^{-3} & 0.492 + 0.25i & 0.194 + 0.189i & -0.047 + 0.091i & -0.183 - 0.438i \end{pmatrix}$$

(d) Verificando a ortogonalidade entre autovetores e o módulo unitário de cada um:

$$SS_{k,ka} := \overline{\left(U^{\langle k\rangle^T}\right)} \cdot U^{\langle ka\rangle} \rightarrow \qquad SS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A determinação do DOA através do MUSIC:

(e) Sequência de projeções Proj da sequência de $\mathrm{NSmpl} = 2000$ vetores $\mathrm{VT}^{\langle n \rangle}$ sobre cada um dos $K = 6$ eixos cartesianos da base ortonormal formada pelos $K = 6$ autovetores, cada autovetor sendo o vetor unitário que dá a direção do respectivo eixo cartesiano da base ortonormal, onde $n = 0..\,\mathrm{NSmpl} - 1$:

$$\mathrm{Proj}_{k,n} := \overline{\left(U^{\langle k \rangle^T}\right)} \cdot \mathrm{VT}^{\langle n \rangle} \rightarrow \quad \mathrm{Proj} = [\text{tabela abaixo}] \cdot \mathrm{mV}$$

	0	1	2
0	23.599-26.215i	-48.173+127.864i	-74.97+31.821i
1	-121.269+123.681i	-6.426+7.544i	-122.829-53.05i
2	-6.792-43.141i	3.142+73.254i	-18.267+72.739i
3	-13.029-8.056i	-10.032+9.392i	-6.177+2.99i
4	3.813-8.031i	-4.658+14.528i	1.697-3.15i
5	1.439+14.581i	-4.149+16.9i	...

(equação (25) do slide 15 do Cap II.6)

Determinando a potência Pot_k da sequência de $\mathrm{NSmpl} = 2000$ projeções em cada respectivo k-ésimo eixo cartesiano dentre os $K = 6$ eixos cartesianos da base ortonormal formada pelos $K = 6$ autovetores. Comparando a potência de cada uma das $K = 6$ s equências de projeções com os respectivos autovalores:

$$\mathrm{Pot}_k := \frac{1}{\mathrm{NSmpl}} \cdot \sum_n \left(\left|\mathrm{Proj}_{k,n}\right|\right)^2 \quad \rightarrow \quad 10^3 \cdot \mathrm{Pot} = \begin{pmatrix} 15.234 \\ 11.775 \\ 6.909 \\ 0.187 \\ 0.176 \\ 0.173 \end{pmatrix} \cdot V^2 \quad \Leftrightarrow \quad 10^3 \cdot \lambda = \begin{pmatrix} 15.234 \\ 11.775 \\ 6.909 \\ 0.187 \\ 0.176 \\ 0.173 \end{pmatrix} \cdot V^2$$

(equação (26) do slide 15 do Cap II.6)

A determinação do DOA através do MUSIC:

(f) Obtendo os *noise eigenvectors* En (autovetores com autovalor associado insignificante):

$\text{startcol} := K - \text{NnoiseEigV} = 3$ $\rightarrow$ indice das colunas de U onde começam os *noise eigenvectors*

$$\text{En} := \text{submatrix}(U, 0, \text{rows}(U) - 1, \text{startcol}, \text{cols}(U) - 1) \quad \rightarrow \quad \text{En} = \begin{pmatrix} -0.124 - 0.553i & -0.085 - 0.32i & 0.074 + 0.019i \\ 0.229 + 0.107i & 0.513 + 0.446i & 0.123 + 0.108i \\ 0.382 - 0.495i & -0.237 + 0.26i & 0.18 + 0.266i \\ 0.049 - 0.152i & 0.252 + 0.17i & -0.095 - 0.653i \\ 0.029 + 0.352i & 0.238 - 0.381i & 0.423 + 0.156i \\ 0.194 + 0.189i & -0.047 + 0.091i & -0.183 - 0.438i \end{pmatrix}$$

(g) O MUSIC spectrum PMU é determinado através de:

$$\text{PMU}(\theta, \phi) = \frac{1}{(|\rho(\theta, \phi)|)^2} \quad \rightarrow \text{ equação (29) do slide 17 do Cap II.6}$$

onde $\rho(\theta, \phi) := \left[\left[(\text{Cpl} \cdot \text{Sv}(\theta, \phi))^T\right] \cdot \text{En} \cdot \text{identity}(\text{NnoiseEigV})\right]^T \cdot m^{-1}$ é a equação (30) do slide 17 (foi inserida a unidade m^{-1} para tornar $\rho(\theta, \phi)$ adimensional e foi multiplicado pela matriz identidade para manter $\rho(\theta, \phi)$ como matriz na situação em que $\text{NnoiseEigV} = 1$).

Tratando numericamente a divisão por zero em $\text{PMU}(\theta, \phi)$ e limitando seu valor máximo em Max, o espectro $\text{PMU}(\theta, \phi)$ é determinado como:

$\text{Max} := 1 \cdot 10^5$ $\rightarrow$ ajustar Max para o topo das "torres" do PMU serem igualmente visíveis no gráfico 3D de $\text{PMU}(\theta, \phi)$ para cada DOA (θ, ϕ) das ondas EM incidentes

$$\text{PMU}(\theta, \phi) := \text{if}\left[|\rho(\theta, \phi)| = 0, 10^{37}, \text{if}\left[\frac{1}{(|\rho(\theta, \phi)|)^2} > \text{Max}, \text{Max}, \frac{1}{(|\rho(\theta, \phi)|)^2}\right]\right]$$

A determinação do DOA através do MUSIC:

Plotando o MUSIC *spectrum* $\mathrm{PMU}(\theta,\phi)$ no *grid range* [θmin, θmax] e [ϕmin, ϕmax] :

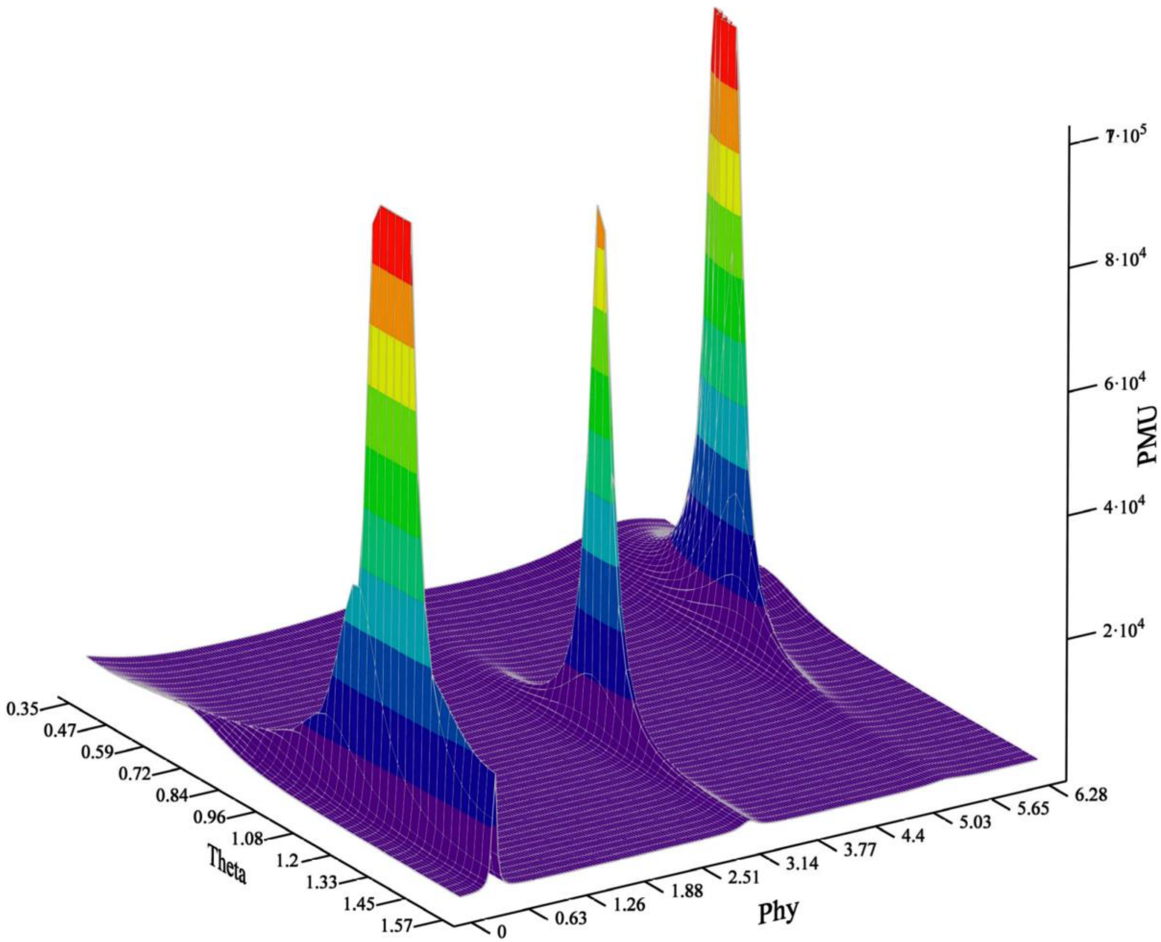
<u>Nota</u>: θ⟶0 é o zenite do UCA e deve ser evitado porque $|\rho(\theta,\phi)| \rightarrow 0$ nesta situação (os dipolos não irradiam p/ θ=0). Esta situação mascara a condição de ortogonalidade entre Cpl.Sv(θ,ϕ) e En, resultando em falsa deteção de DOA para θ⟶0.

$\theta\mathrm{min} := 20\cdot°$ $\qquad \theta\mathrm{max} := 90\cdot°$ $\qquad \mathrm{Grid}\theta := 50$

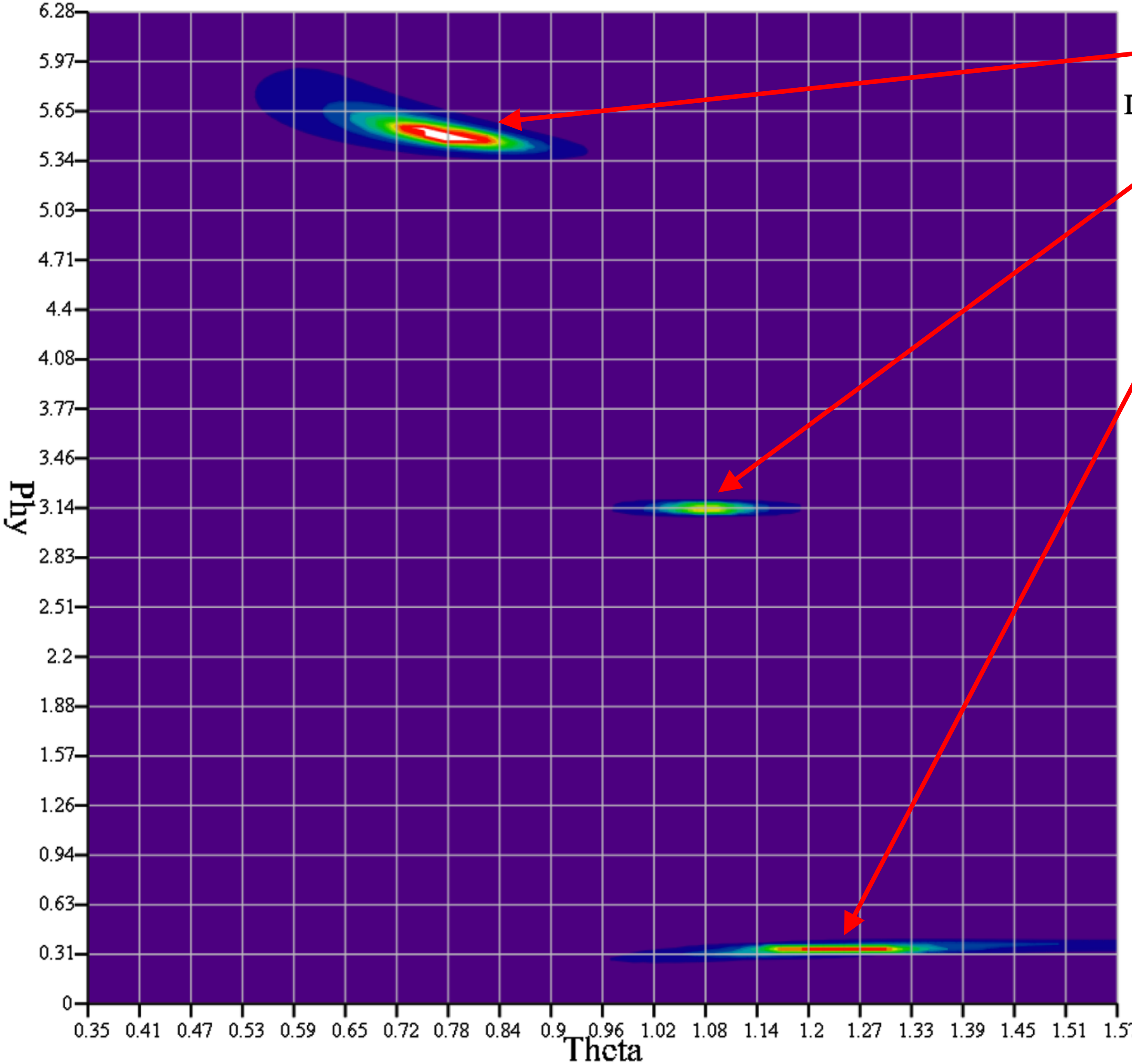
$\phi\mathrm{min} := 0\cdot°$ $\qquad \phi\mathrm{max} := 360\cdot°$ $\qquad \mathrm{Grid}\phi := 200$

$\mathrm{Dat} := \mathrm{CreateMesh}(\mathrm{PMU}, \theta\mathrm{min}, \theta\mathrm{max}, \phi\mathrm{min}, \phi\mathrm{max}, \mathrm{Grid}\theta, \mathrm{Grid}\phi)$

$$\mathrm{DOA} = \begin{pmatrix} 45 & 315 \\ 62 & 180 \\ 71 & 20 \end{pmatrix}\cdot° \quad \rightarrow \quad \mathrm{DOA} = \begin{pmatrix} 0.785 & 5.498 \\ 1.082 & 3.142 \\ 1.239 & 0.349 \end{pmatrix}\cdot \mathrm{rad}$$



A determinação do DOA através do MUSIC:



$$\mathrm{DOA} = \begin{pmatrix} 0.785 & 5.498 \\ 1.082 & 3.142 \\ 1.239 & 0.349 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{rad}$$

Note portanto que os ângulos (θ, ϕ) em que ocorrem os máximos locais de $\mathrm{PMU}(\theta, \phi)$ correspondem com boa aproximação aos DOAs (θ_m, ϕ_m) das respectivas $M = 3$ ondas EM que incidem no *array.*

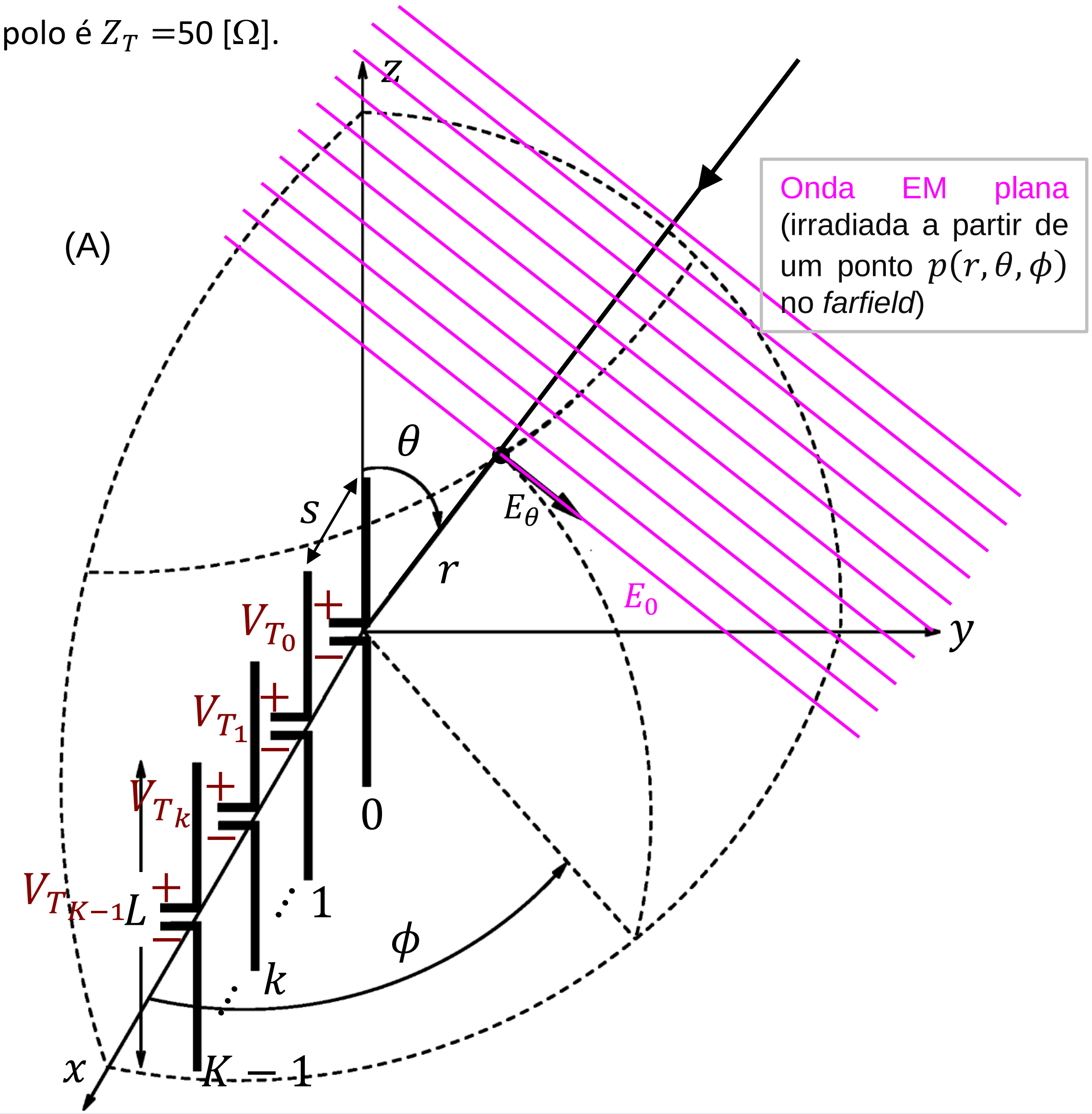
Note também que a resolução angular do DOA ϕ é muito maior do que a resolução angular do DOA θ. Isto acontece porque os dipolos estão espacialmente distribuídos no plano azimutal onde ϕ é medido (plano xy). Portanto, para aumentar a resolução angular do DOA θ, seria necessário "empilhar" réplicas do UCA ao longo do eixo z.

Note ainda que quanto mais dipolos formar o UCA, maior será a resolução angular do DOA ϕ.

A determinação do DOA através do MUSIC:

Exemplo 2: Consideremos o *phased-array* do tipo *Uniform Linear Array* (ULA) mostrado em (A), operando em f_o = 850MHz e constituído por 6 dipolos cilíndricos de tamanho L = 0.5λ e de raio *a*=5mm, separados entre si de *s*=0.5λ, sendo λ o comprimento de onda em f_o. O plano *xy* é paralelo ao plano do solo de modo que os dipolos são verticalmente polarizados.

A impedância de carga de cada dipolo é Z_T =50 [Ω].



A determinação do DOA através do MUSIC:

Um conjunto de ondas EM originadas em transmissores localizados em coordenadas distintas incidem no ULA com amplitudes Mag relativas e DOAs (θ, ϕ) conforme tabela em (A). Os transmissores utilizam modulação 16-QAM com um alfabeto da modulação dado pelo mapa IQSymbolMap em (B) , sendo cada um dos 16 símbolos IQ em IQSymbolMap mapeado em uma palavra de 4 bits (ver https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapIV.pdf).

(A)

Mag:	DOA θ:	DOA ϕ:
1.0	60°	120°
0.7	80°	60°
0.5	90°	15°

(B)

$$\text{IQSymbolMap} = \begin{pmatrix} -3+3i & -1+3i & 1+3i & 3+3i \\ -3+i & -1+i & 1+i & 3+i \\ -3-i & -1-i & 1-i & 3-i \\ -3-3i & -1-3i & 1-3i & 3-3i \end{pmatrix}$$

Para efeito de eficiência espectral, como é usual em qualquer sistema digital, os transmissores adotam um *scrambler* na entrada do modulador (*energy dispersal scrambler* - ver https://en.wikipedia.org/wiki/Scrambler) que torna aleatória e uniforme a distribuição dos símbolos IQ na sequência de símbolos IQ extraídos do mapa IQSymbolMap em função da sequência de palavras binárias de 4 bits na entrada do *scrambler*, sequência que corresponde à informação digital a ser transmitida pelo transmissor.

As tensões nos terminais dos 6 dipolos resultantes da incidência das ondas EM são digitalizadas e convertidas para banda-base pelos respectivos receptores (RX) do *array* de dipolos e são armazenadas no vetor $\underline{V_T}[n] = \begin{bmatrix} V_{T_0}[n] \\ V_{T_1}[n] \\ \vdots \\ V_{T_5}[n] \end{bmatrix}$.

Uma sequência de $NSmpl = 2000$ vetores $\underline{V_T}[n]$, $n = 0,1 \cdots NSmpl - 1$, é processada pelo algoritmo MUSIC para efeito de determinar o DOA ϕ das ondas EM incidentes.

A determinação do DOA através do MUSIC:

Pede-se: (a) Determine e plote a constelação das 6 sequências de símbolos IQ armazenadas em $\underline{V_T}[n]$ caso não houvesse ruído no canal ($SNR = \infty$). **(b)** Determine e plote a constelação das 6 sequências de símbolos IQ armazenadas em $\underline{V_T}[n]$ sabendo que a relação sinal-ruído do canal no local onde o UCA situa-se é $SNR = 15$ [dB]. **(c)** Determine a matriz de covariância $\boldsymbol{Cov}$ da sequência de vetores $\underline{V_T}[n]$ e efetue a sua *eigen*-decomposição. **(d)** Verifique a ortogonalidade entre autovetores da matriz $\boldsymbol{Cov}$ e o módulo unitário de cada um deles. **(e)** Efetue a projeção da sequência de $NSmpl$ vetores $\underline{V_T}[n]$ sobre cada um dos 6 eixos cartesianos da base ortonormal formada pelos autovetores de $\boldsymbol{Cov}$, determine a potência de cada uma das 6 projeções e verifique a correspondência com os respectivos autovalores. **(f)** Determine os auto vetores de ruído da matriz $\boldsymbol{Cov}$. **(g)** Determine o espectro $\mathrm{PMU}(\theta,\phi)$ resultante do processamento efetuado pelo algoritmo MUSIC. Plote em um gráfico cartesiano a curva $\mathrm{PMU}(\theta = 90°,\phi)$ e, adicionalmente, plote a curva$\mathrm{PMU}(\theta = 90°,\phi)$ em um gráfico polar. Verifique se os máximos locais de $\mathrm{PMU}(\theta = 90°,\phi)$ ocorrem nos DOAs (θ_m,ϕ_m) das M ondas EM que incidem no *array,* $m = 0,1 \cdots M-1$.

O *script* do software MathCad utilizado na solução deste exemplo está disponível em http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/E2S34 (MUSIC_ULA6D_PMU(Phy))_R1.zip.

Solução:

$f := 850 \cdot MHz$ → freqüência de operação $\lambda := \frac{c}{f}$ $\lambda = 0.353m$ → comprimento de onda da onda eletromagnética

$ZT := 50 \cdot \Omega$ → impedância de carga de cada um dos 6 dipolos do array

$SNR := 15$ [dB] → Relação sinal-ruído no canal de transmissão

$NSmpl := 2000$ → Número de amostras em banda-base (símbolos IQ) recebidas por dipolo

DOAs (θ,ϕ) e magnitude relativa Mag das ondas EM planas que incidem no ULA moduladas em 16-QAM:

$$DOA := \begin{pmatrix} 60 \cdot ° & 120 \cdot ° \\ 80 \cdot ° & 60 \cdot ° \\ 90 \cdot ° & 15 \cdot ° \end{pmatrix} \qquad Mag := \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.7 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

→ amplitudes das ondas EM são distintas em razão das condições de propagação distintas no canal de transmissão

$M := rows(DOA) = 3$ → Número de ondas EM planas que incidem no ULA.

$L := 0.5 \cdot \lambda$ → tamanho dos dipolos

$R := 5 \cdot mm$ → raio do dipolo cilíndrico

$\beta := \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = 17.815 \frac{rad}{m}$ → constante de propagação da onda EM

$s := 0.5 \cdot \lambda$ → espaçamento entre dipolos

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 2 \cdot s & 0 & 0 \\ 3 \cdot s & 0 & 0 \\ 4 \cdot s & 0 & 0 \\ 5 \cdot s & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.176 & 0 & 0 \\ 0.353 & 0 & 0 \\ 0.529 & 0 & 0 \\ 0.705 & 0 & 0 \\ 0.882 & 0 & 0 \end{pmatrix} m$$

→ coordenadas do centro de cada um dos 6 dipolos do ULA.

$K := rows(C) = 6$ → número de dipolos do *array*

A determinação do DOA através do MUSIC:

(a) Matriz impedância entre os dipolos do *array*:

$$aa := 0..K-1 \qquad bb := 0..K-1 \qquad D_{aa,bb} := \sqrt{\left[\left(C^{\langle 0\rangle}\right)_{aa} - \left(C^{\langle 0\rangle}\right)_{bb}\right]^2 + \left[\left(C^{\langle 1\rangle}\right)_{aa} - \left(C^{\langle 1\rangle}\right)_{bb}\right]^2 + \left[\left(C^{\langle 2\rangle}\right)_{aa} - \left(C^{\langle 2\rangle}\right)_{bb}\right]^2}$$

$$Z_{aa,bb} := \mathrm{if}\left(aa = bb, \mathrm{Zin\_Schelkunoff}\left(\frac{R}{mm}, \frac{\lambda}{m}, \frac{L}{m}\right), \mathrm{ZMutual\_Schelkunoff}\left(\frac{L}{m}, \frac{L}{m}, \frac{R}{mm}, \frac{R}{mm}, \frac{D_{aa,bb}}{m}, \frac{\lambda}{m}\right)\right)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 78.517 + 45.679i & -14.447 - 34.501i & 4.624 + 20.452i & -2.176 - 14.184i & 1.25 + 10.795i & -0.808 - 8.696i \\ -14.447 - 34.501i & 78.517 + 45.679i & -14.447 - 34.501i & 4.624 + 20.452i & -2.176 - 14.184i & 1.25 + 10.795i \\ 4.624 + 20.452i & -14.447 - 34.501i & 78.517 + 45.679i & -14.447 - 34.501i & 4.624 + 20.452i & -2.176 - 14.184i \\ -2.176 - 14.184i & 4.624 + 20.452i & -14.447 - 34.501i & 78.517 + 45.679i & -14.447 - 34.501i & 4.624 + 20.452i \\ 1.25 + 10.795i & -2.176 - 14.184i & 4.624 + 20.452i & -14.447 - 34.501i & 78.517 + 45.679i & -14.447 - 34.501i \\ -0.808 - 8.696i & 1.25 + 10.795i & -2.176 - 14.184i & 4.624 + 20.452i & -14.447 - 34.501i & 78.517 + 45.679i \end{pmatrix} \cdot \Omega$$

Steering vector Sv(θ,ϕ) - equação (16) do slide 12 do Cap II.6:

$$Sv(\theta,\phi) := \frac{\lambda}{\pi \cdot \sin\left(\frac{\beta \cdot L}{2}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\beta \cdot L}{2} \cdot \cos(\theta)\right) - \cos\left(\frac{\beta \cdot L}{2}\right)}{\sin(\theta)} \cdot \begin{bmatrix} e^{j \cdot \left[\beta \cdot \left(\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\cdot C_{0,0} + \sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot C_{0,1} + \cos(\theta)\cdot C_{0,2}\right)\right]} \\ e^{j \cdot \left[\beta \cdot \left(\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\cdot C_{1,0} + \sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot C_{1,1} + \cos(\theta)\cdot C_{1,2}\right)\right]} \\ e^{j \cdot \left[\beta \cdot \left(\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\cdot C_{2,0} + \sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot C_{2,1} + \cos(\theta)\cdot C_{2,2}\right)\right]} \\ e^{j \cdot \left[\beta \cdot \left(\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\cdot C_{3,0} + \sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot C_{3,1} + \cos(\theta)\cdot C_{3,2}\right)\right]} \\ e^{j \cdot \left[\beta \cdot \left(\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\cdot C_{4,0} + \sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot C_{4,1} + \cos(\theta)\cdot C_{4,2}\right)\right]} \\ e^{j \cdot \left[\beta \cdot \left(\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\cdot C_{5,0} + \sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot C_{5,1} + \cos(\theta)\cdot C_{5,2}\right)\right]} \end{bmatrix}$$

A determinação do DOA através do MUSIC:

Matriz do acoplamento Cpl - equação (15) do slide 12 do Cap II.6:

$ZA := Z_{0,0}$ → impedância própria dos $K = 6$ dipolos do ULA

$$Cpl := (ZT + ZA)\cdot(Z + ZT\cdot \text{identity}(K))^{-1}$$

$$Cpl = \begin{pmatrix} 0.993 + 0.089i & 0.161 + 0.18i & -0.073 - 0.048i & 0.045 + 0.023i & -0.032 - 0.015i & 0.026 + 0.016i \\ 0.161 + 0.18i & 0.991 + 0.147i & 0.157 + 0.161i & -0.07 - 0.038i & 0.043 + 0.017i & -0.032 - 0.015i \\ -0.073 - 0.048i & 0.157 + 0.161i & 0.993 + 0.153i & 0.155 + 0.158i & -0.07 - 0.038i & 0.045 + 0.023i \\ 0.045 + 0.023i & -0.07 - 0.038i & 0.155 + 0.158i & 0.993 + 0.153i & 0.157 + 0.161i & -0.073 - 0.048i \\ -0.032 - 0.015i & 0.043 + 0.017i & -0.07 - 0.038i & 0.157 + 0.161i & 0.991 + 0.147i & 0.161 + 0.18i \\ 0.026 + 0.016i & -0.032 - 0.015i & 0.045 + 0.023i & -0.073 - 0.048i & 0.161 + 0.18i & 0.993 + 0.089i \end{pmatrix}$$

Constelação 16-QAM do sinal transportado por cada onda EM:

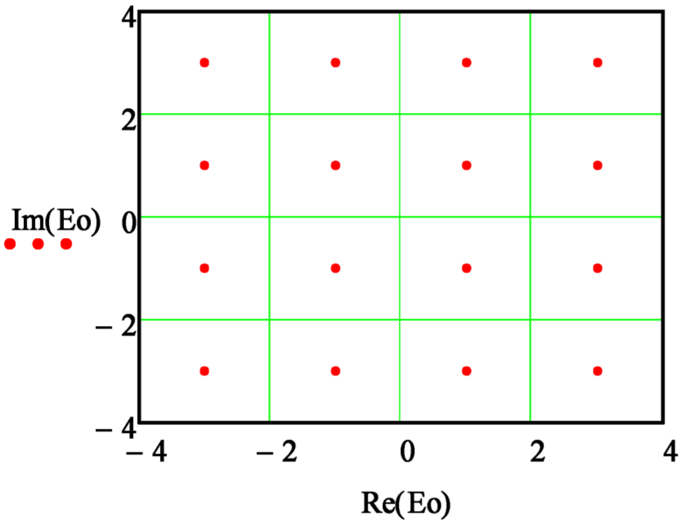
$$A := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad ii := 0..3 \qquad jj := 0..3 \qquad IQSymbolMap_{ii,jj} := A_{3-jj} + j\cdot A_{ii}$$

$$IQSymbolMap = \begin{pmatrix} -3 + 3i & -1 + 3i & 1 + 3i & 3 + 3i \\ -3 + i & -1 + i & 1 + i & 3 + i \\ -3 - i & -1 - i & 1 - i & 3 - i \\ -3 - 3i & -1 - 3i & 1 - 3i & 3 - 3i \end{pmatrix}$$

A determinação do DOA através do MUSIC:

Geração da sequência de amostras em banda-base transportadas pelas $M = 3$ ondas EM planas que incidem no ULA moduladas pela sequência de $NSmpl = 2000$ símbolos IQ 16-QAM:

$n := 0..NSmpl - 1 \qquad \_m := 0..M - 1 \qquad Eo_{\_m,n} := IQSymbolMap_{round(rnd(3)),round(rnd(3))} \cdot \frac{V}{m}$



→ constelação de símbolos IQ 16-QAM gerada nos $M = 3$ TXs que dão origem às respectivas ondas EM moduladas pelas respectivas sequências de símbolos IQ.

Amplitude de cada onda EM: $Eo_{\_m,n} := Mag_{\_m} \cdot Eo_{\_m,n}$

Sequência de amostras em banda-base transportadas por cada uma das $M = 3$ ondas EM planas que incidem no ULA:

Eo =

	0	1	2	3	4	5
0	-1-i	1-i	1-3i	3+i	1-i	3-i
1	-0.7-0.7i	0.7+2.1i	-0.7+2.1i	0.7+0.7i	-0.7+0.7i	-0.7-2.1i
2	-1.5-0.5i	-1.5+0.5i	0.5+0.5i	1.5+0.5i	1.5-0.5i	...

$\cdot \frac{V}{m}$

A determinação do DOA através do MUSIC:

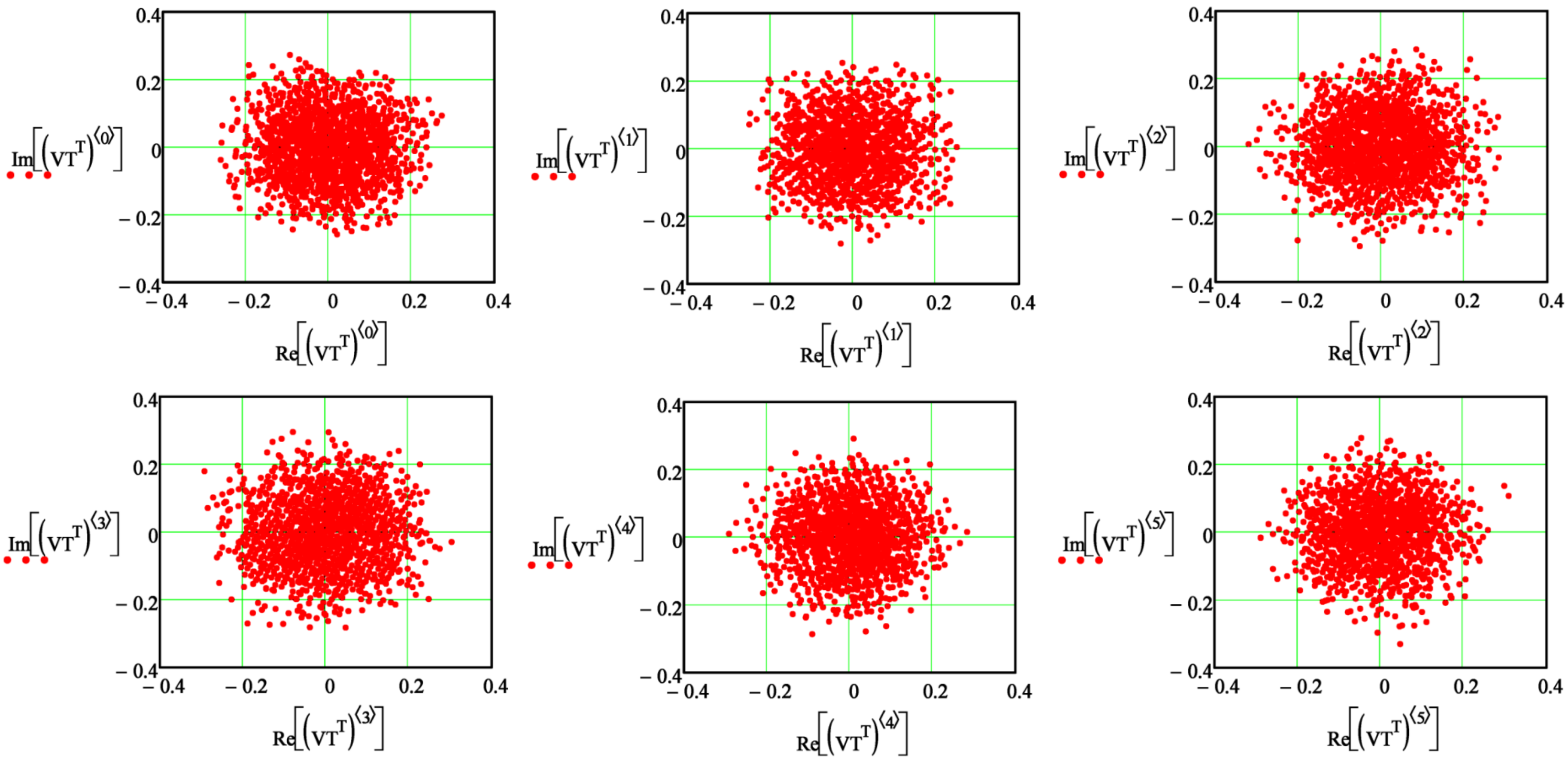
$$SvM^{\langle \_m \rangle} := Sv\left(DOA_{\_m,0}, DOA_{\_m,1}\right)$$

→ matriz de *steering vectors* - equação (18) do slide 13 do Cap II.6

$$VT := \frac{ZT}{ZT + ZA} \cdot Cpl \cdot SvM \cdot Eo$$

→ VT é o vetor em que cada componente é a sequência de amostras da tensão digitalizada em banda-base nos terminais do repectivo dipolo - equação (17) do slide 13 do Cap II.6.

Plotando a constelação de símbolos IQ recebidas nos terminais VT de cada um dos $K = 6$ dipolos:

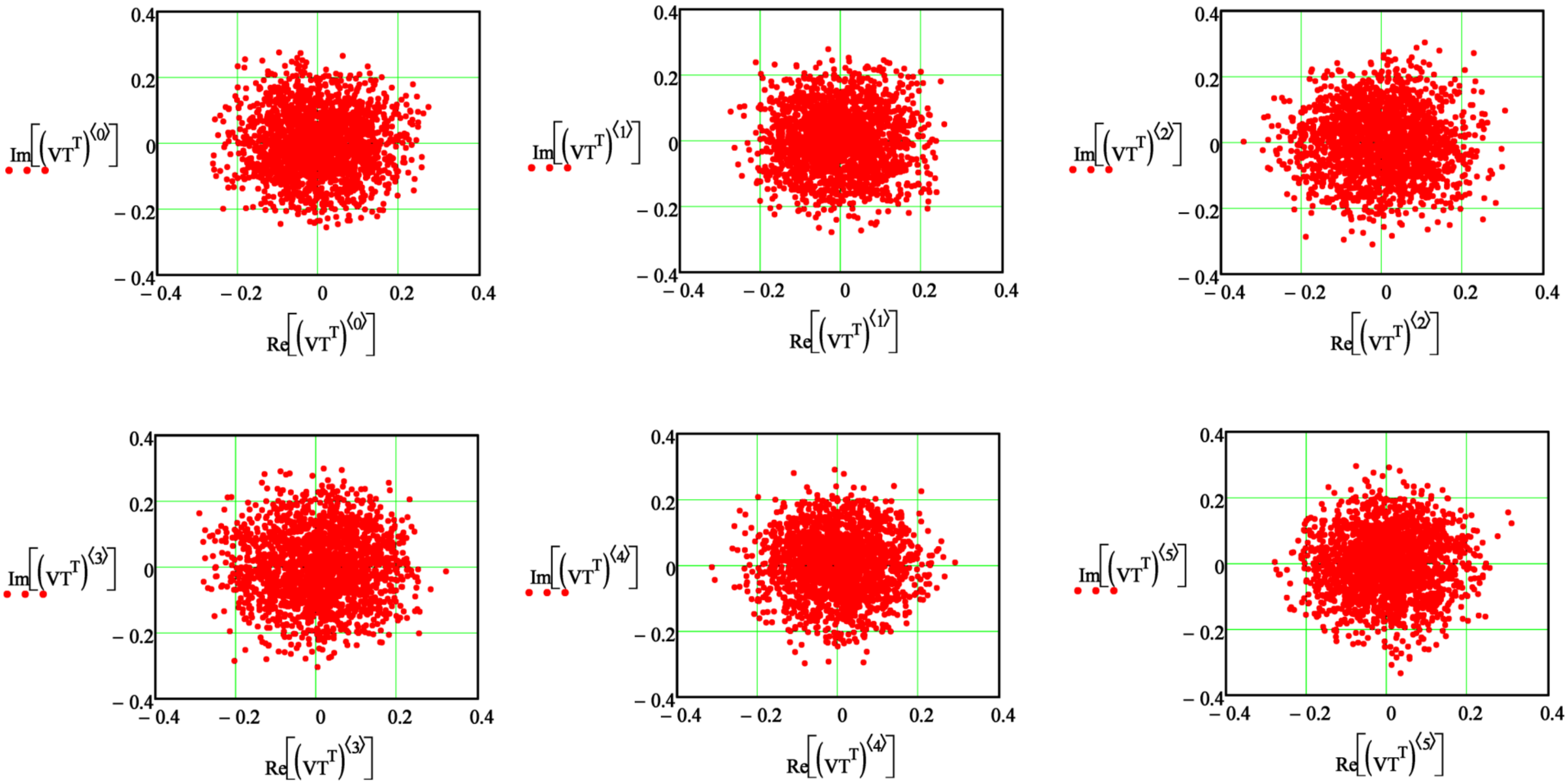


A determinação do DOA através do MUSIC:

(b) Adicionando às tensões do vetor VT o ruído gaussiano do canal de modo que a relação sina-ruído seja $\mathrm{SNR} = 15$ [dB]:

$\mathrm{VT} := \mathrm{AWGN}(\mathrm{VT}, \mathrm{SNR})$ $\rightarrow$ equação (20) do slide 13 do Cap II.6

Plotando a constelação de símbolos IQ recebidas nos terminais VT de cada um dos $\mathrm{K} = 6$ dipolos após a adição do ruído gaussiano do canal:



A determinação do DOA através do MUSIC:

(c) Construindo a matriz de covariância Cov da sequência de vetores $VT^{\langle n \rangle}$:

$$Vm := \frac{1}{NSmpl} \cdot \sum_{n=0}^{NSmpl-1} VT^{\langle n \rangle} = \begin{pmatrix} -1.156 - 0.111i \\ -3.252 + 0.121i \\ -2.015 - 0.629i \\ 5.342 + 1.16i \\ 0.716 + 1.211i \\ -1.824 - 0.57i \end{pmatrix} \cdot mV$$

→ Vetor média Vm da sequência de vetores $VT^{\langle n \rangle}$ - equação (21) do slide 14 do Cap II.6

Extraindo o vetor média Vm da sequência de vetores $VT^{\langle n \rangle}$:

$$VT^{\langle n \rangle} := VT^{\langle n \rangle} - Vm$$

Matriz de covariância Cov da sequência de vetores $VT^{\langle n \rangle}$:

$$Cov := \frac{1}{NSmpl} \cdot \sum_{n=0}^{NSmpl-1} \left[\left(VT^{\langle n \rangle} \right) \cdot \left(\overline{VT^{\langle n \rangle}} \right)^T \right]$$

→ equação (22) do slide 14 do Cap II.6

$$10^3 \cdot Cov = \begin{pmatrix} 18.66 & 5.11 + 4.12i & -14.26 + 6.87i & -10.7 - 3.28i & 11.97 - 7.69i & 11.12 - 4.2i \\ 5.11 - 4.12i & 17.84 & 1 + 2.97i & -16.43 + 4.87i & -5.67 - 2.85i & 13.89 - 4.71i \\ -14.26 - 6.87i & 1 - 2.97i & 21.27 & 0.19 + 3.84i & -16.08 + 3.87i & -9.32 - 8.6i \times 10^{-3} \\ -10.7 + 3.28i & -16.43 - 4.87i & 0.19 - 3.84i & 21.81 & 1.18 + 4.24i & -14.69 + 2.58i \\ 11.97 + 7.69i & -5.67 + 2.85i & -16.08 - 3.87i & 1.18 - 4.24i & 17.76 & 3.49 + 1.96i \\ 11.12 + 4.2i & 13.89 + 4.71i & -9.32 + 8.6i \times 10^{-3} & -14.69 - 2.58i & 3.49 - 1.96i & 18.39 \end{pmatrix} \cdot V^2$$

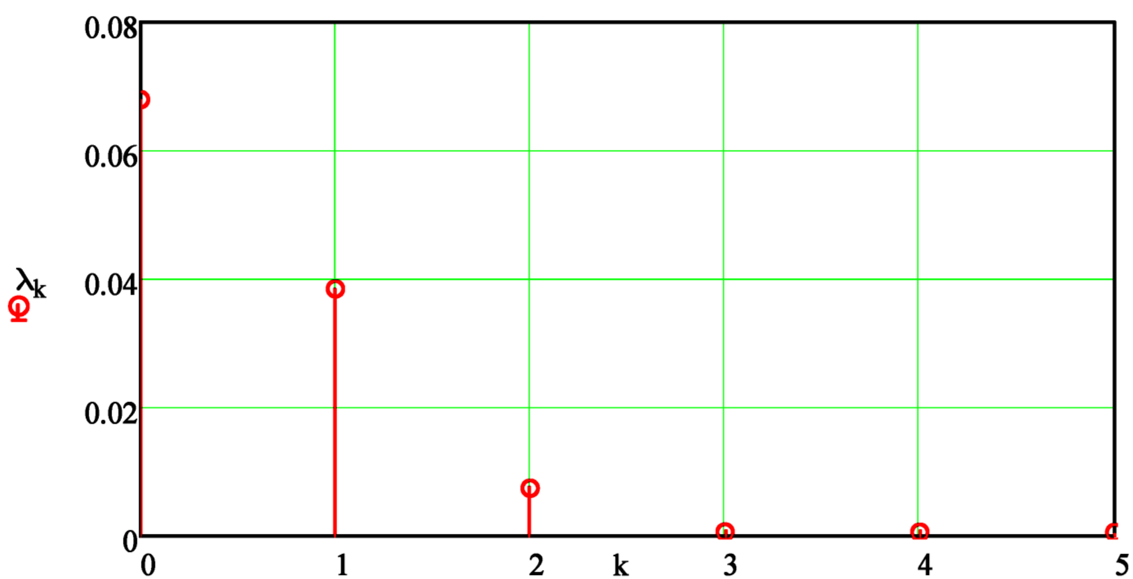
A determinação do DOA através do MUSIC:

Autovalores λ_k da matriz Cov: $k := 0..K-1 \quad ka := 0..K-1$

$$\lambda_k := \text{eigenvals}(\text{Cov})_{K-k-1} \quad \rightarrow \quad 10^3 \cdot \lambda = \begin{pmatrix} 67.962 \\ 38.496 \\ 7.461 \\ 0.628 \\ 0.601 \\ 0.586 \end{pmatrix} \cdot V^2$$

$\rightarrow$ equação (23) do slide 14 do Cap II.6

Gráfico do espectro de autovalores λ_k. Note os últimos $\text{NnoiseEigV} := 3$ valores de λ_k insignificantes aproximadamente iguais, o que indica haver $\text{NnoiseEigV} = 3$ *noise eigevectors* e portanto $K - \text{NnoiseEigV} = 3$ sinais incidentes (ajustar manualmente o valor de NnoiseEigV no início do parágrafo acima a partir da inspeção visual do gráfico do espectro de autovalores λ_k abaixo - ver discussão no slide 16 do Cap II.6).



A determinação do DOA através do MUSIC:

Autovetores $U^{\langle k \rangle}$ da matriz Cov (equação (24) do slide 14 do Cap II.6):

$$U_{k,ka} := \mathrm{eigenvec}\left(\mathrm{Cov}, \lambda_{ka}\right)_k \quad \rightarrow$$

$$U = \begin{pmatrix} -0.14 - 0.447i & 0.24 - 0.059i & 0.284 + 0.251i & 0.15 + 0.166i & -0.456 - 0.36i & 0.297 + 0.316i \\ -0.303 - 0.199i & -0.24 + 0.39i & -0.218 - 0.143i & 0.102 + 0.508i & 0.187 - 0.212i & 0.283 - 0.403i \\ -0.087 + 0.393i & -0.465 + 0.071i & 0.365 + 0.252i & 0.389 - 0.141i & 0.308 - 0.204i & 0.217 + 0.254i \\ 0.271 + 0.34i & 0.28 - 0.315i & -0.485 - 0.13i & 0.236 + 0.107i & 0.029 - 0.111i & 0.536 + 0.11i \\ 0.183 - 0.289i & 0.455 - 0.078i & 0.407 - 0.076i & 0.322 + 0.038i & 0.562 + 0.183i & 0.057 - 0.2i \\ -0.104 - 0.413i & -0.069 + 0.334i & -0.404 - 0.066i & 0.317 - 0.487i & 0.069 + 0.28i & 0.113 + 0.318i \end{pmatrix}$$

(d) Verificando a ortogonalidade entre autovetores e o módulo unitário de cada um:

$$SS_{k,ka} := \overline{\left(U^{\langle k \rangle T}\right)} \cdot U^{\langle ka \rangle} \quad \rightarrow \quad SS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A determinação do DOA através do MUSIC:

(e) Sequência de projeções $Proj$ da sequência de $NSmpl = 2000$ vetores $VT^{\langle n \rangle}$ sobre cada um dos $K = 6$ eixos cartesianos da base ortonormal formada pelos $K = 6$ autovetores, cada autovetor sendo o vetor unitário que dá a direção do respectivo eixo cartesiano da base ortonormal, onde $n = 0 .. NSmpl - 1$:

$$Proj_{k,n} := \overline{\left(U^{\langle k \rangle T}\right)} \cdot VT^{\langle n \rangle} \quad \rightarrow \quad Proj = \cdot mV$$

	0	1	2
0	131.423-80.01i	7.471-11.315i	251.277-30.38i
1	-60.441-85.669i	120.266+169.715i	126.427+280.533i
2	-61.092+82.762i	17.778+106.915i	50.374-12.853i
3	25.532-7.711i	-10.124+30.2i	7.432-9.36i
4	10.222+15.756i	-21.847+20.591i	-18.598+11.547i
5	24.773+0.719i	-17.832-29.336i	...

(equação (25) do slide 15 do Cap II.6)

Determinando a potência Pot_k da sequência de $NSmpl = 2000$ projeções em cada respectivo k-ésimo eixo cartesiano dentre os $K = 6$ eixos cartesianos da base ortonormal formada pelos $K = 6$ autovetores. Comparando a potência de cada uma das $K = 6$ sequências de projeções com os respectivos autovalores:

$$Pot_k := \frac{1}{NSmpl} \cdot \sum_n \left(\left|Proj_{k,n}\right|\right)^2 \quad \rightarrow \quad 10^3 \cdot Pot = \begin{pmatrix} 67.962 \\ 38.496 \\ 7.461 \\ 0.628 \\ 0.601 \\ 0.586 \end{pmatrix} \cdot V^2 \quad \Leftrightarrow \quad 10^3 \cdot \lambda = \begin{pmatrix} 67.962 \\ 38.496 \\ 7.461 \\ 0.628 \\ 0.601 \\ 0.586 \end{pmatrix} \cdot V^2$$

(equação (26) do slide 15 do Cap II.6)

A determinação do DOA através do MUSIC:

(f) Obtendo os *noise eigenvectors* En (autovetores com autovalor associado insignificante):

$\text{startcol} := K - \text{NnoiseEigV} = 3$ → indice das colunas de U onde começam os *noise eigenvectors*

$$\text{En} := \text{submatrix}(U, 0, \text{rows}(U) - 1, \text{startcol}, \text{cols}(U) - 1) \quad \rightarrow \quad \text{En} = \begin{pmatrix} 0.15 + 0.166i & -0.456 - 0.36i & 0.297 + 0.316i \\ 0.102 + 0.508i & 0.187 - 0.212i & 0.283 - 0.403i \\ 0.389 - 0.141i & 0.308 - 0.204i & 0.217 + 0.254i \\ 0.236 + 0.107i & 0.029 - 0.111i & 0.536 + 0.11i \\ 0.322 + 0.038i & 0.562 + 0.183i & 0.057 - 0.2i \\ 0.317 - 0.487i & 0.069 + 0.28i & 0.113 + 0.318i \end{pmatrix}$$

(g) O MUSIC spectrum PMU é determinado através de:

$$\text{PMU}(\theta,\phi) = \frac{1}{(|\rho(\theta,\phi)|)^2}$$ → equação (29) do slide 17 do Cap II.6

onde $\rho(\theta,\phi) := \left[\left[\overline{(\text{Cpl}\cdot\text{Sv}(\theta,\phi))^T}\right]\cdot\text{En}\cdot\text{identity}(\text{NnoiseEigV})\right]^T \cdot m^{-1}$ é a equação (30) do slide 17 (foi inserida a unidade m^{-1} para tornar $\rho(\theta,\phi)$ adimensional e foi multiplicado pela matriz identidade para manter $\rho(\theta,\phi)$ como matriz na situação em que $\text{NnoiseEigV} = 1$).

Tratando numericamente a divisão por zero em $\text{PMU}(\theta,\phi)$ e limitando seu valor máximo em Max , o espectro $\text{PMU}(\theta,\phi)$ é determinado como:

$$\text{PMU}(\theta,\phi) := \text{if}\left[|\rho(\theta,\phi)| = 0, 10^{37}, \text{if}\left[\frac{1}{(|\rho(\theta,\phi)|)^2} > \text{Max}, \text{Max}, \frac{1}{(|\rho(\theta,\phi)|)^2}\right]\right]$$

onde

$\text{Max} := 1\cdot 10^5$ → ajustar Max para os máximos locais da curva $\text{PMU}(\theta = 90°,\phi)$ terem a mesma amplitude no gráfico cartesiano de $\text{PMU}(\theta = 90°,\phi)$ para cada DOA (θ_m, ϕ_m) das ondas EM incidentes.

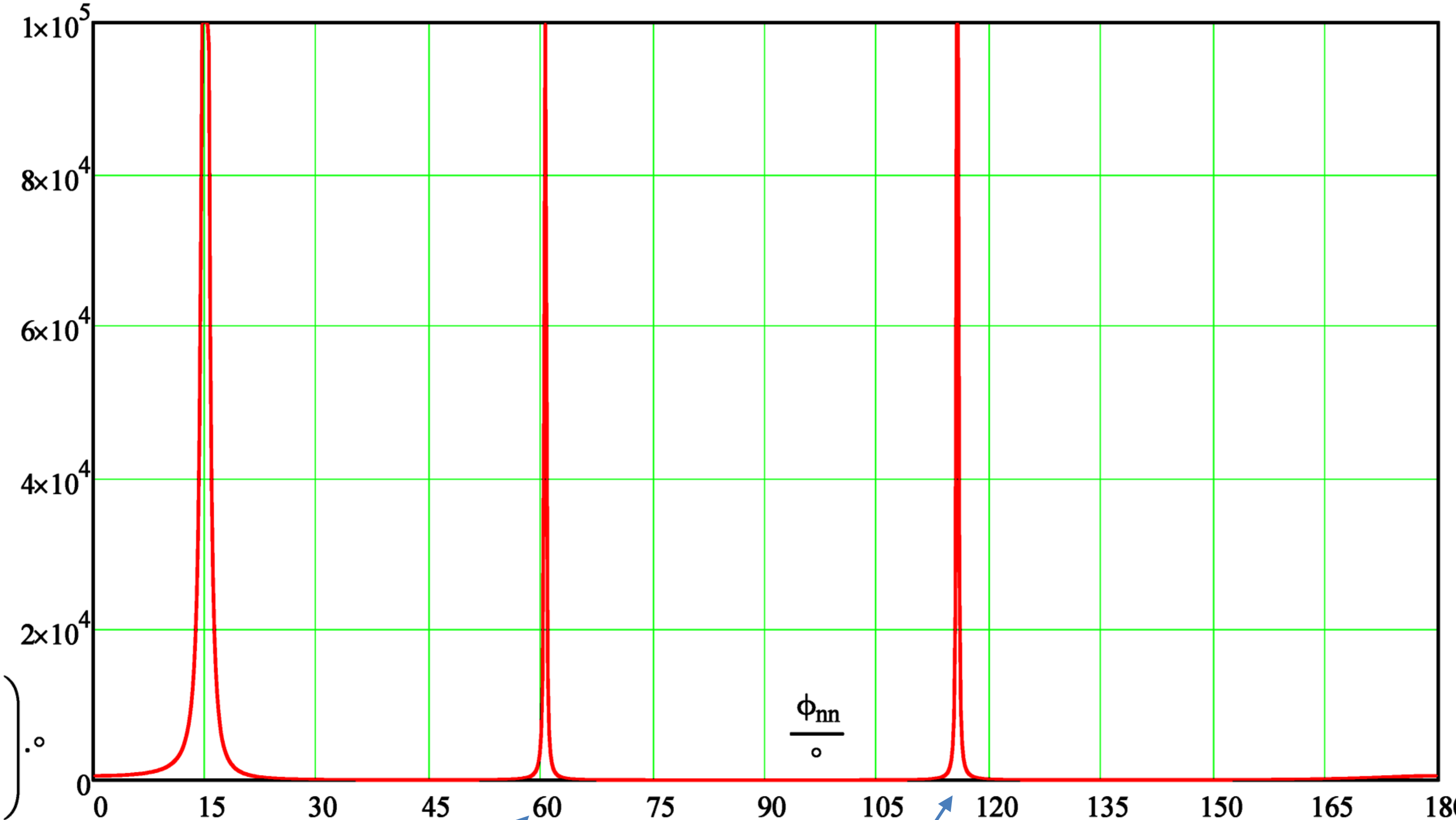
A determinação do DOA através do MUSIC:

$Nptos := 1000 \qquad nn := 0..Nptos - 1 \qquad \phi_{nn} := \pi \cdot \frac{nn}{Nptos}$

$|PMU(90°, \phi_{nn})|$

(θ_m, ϕ_m)

$$DOA = \begin{pmatrix} 60 & 120 \\ 80 & 60 \\ 90 & 15 \end{pmatrix} \cdot °$$



DOA ϕ identificado com boa precisão mas com menor resolução devido ao DOA $\phi =$ 15° estar próximo do ângulo 0° do eixo do ULA (eixo x) em que os dipolos estão alinhados e a discriminação angular fica comprometida. Mesmo problema acontecerá para um DOA ϕ próximo de 180°.

DOA ϕ identificado com boa precisão e resolução.

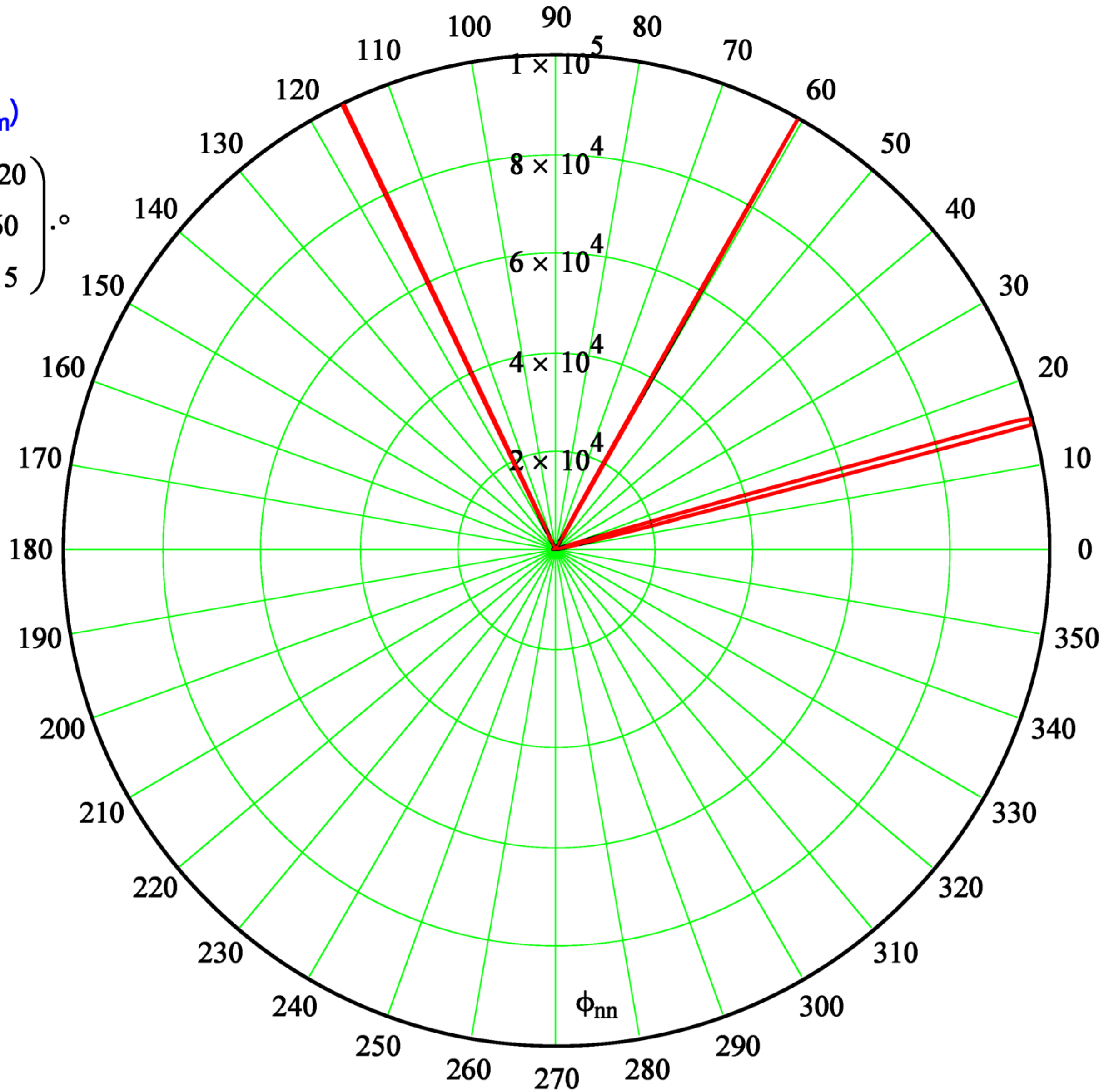
DOA ϕ identificado com boa resolução mas com precisão comprometida porque o DOA θ =60° se afasta de θ =90° , que é o ângulo de incidência que identifica o plano xy , plano de incidência em que ocorre o máximo ganho dos dipolos. Note que o ULA não é distribuído em duas dimensões como o UCA do Exemplo 1 do slide 18, portanto, o MUSIC não somente não consegue identificar um DOA θ como também perde precisão para um DOA θ próximo de 0° ou 180°, em que o ganho dos dipolos é nulo.

A determinação do DOA através do MUSIC:

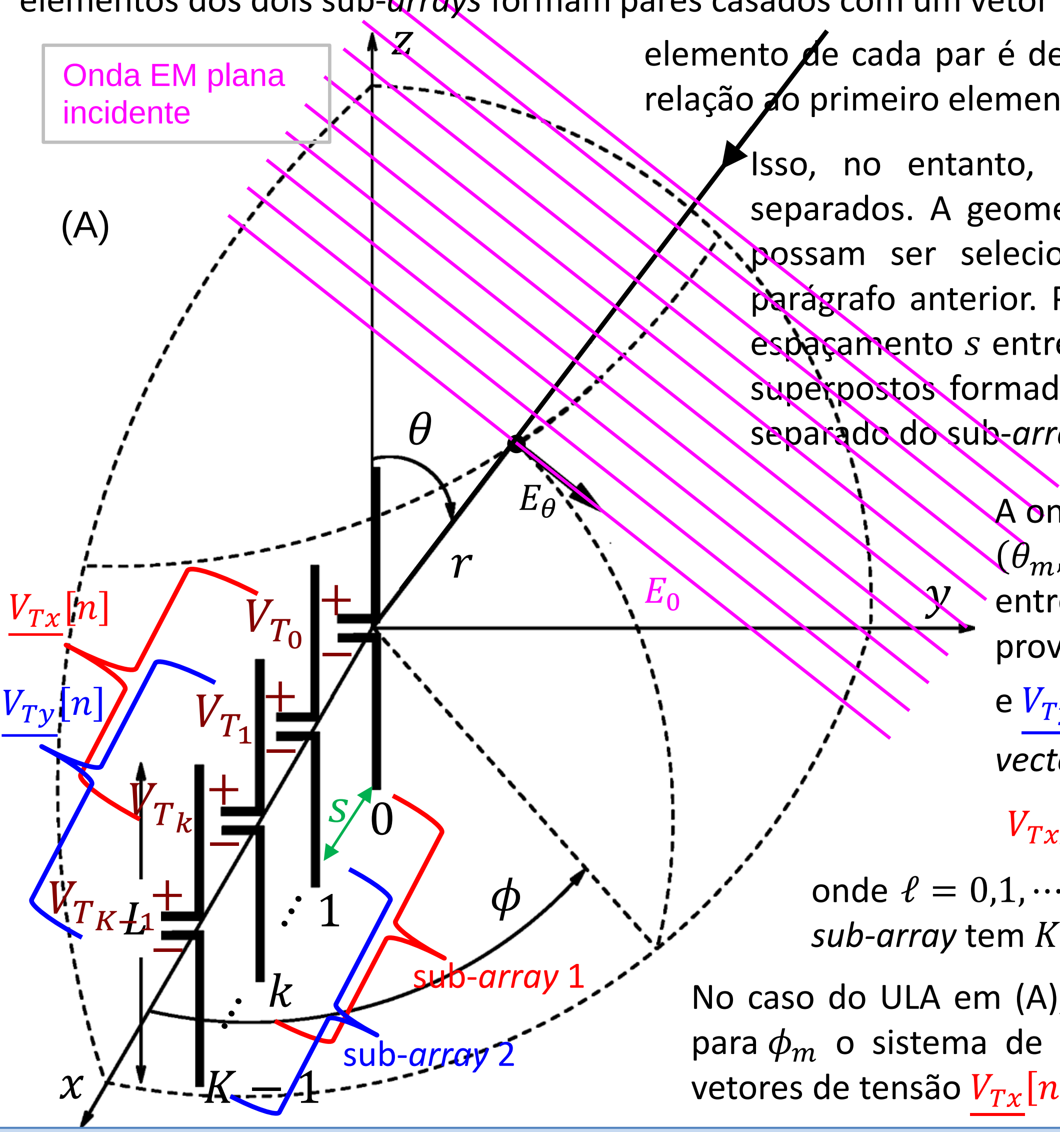
(θ_m, ϕ_m)

$$\mathrm{DOA} = \begin{pmatrix} 60 & 120 \\ 80 & 60 \\ 90 & 15 \end{pmatrix} \cdot °$$

$\left|\mathrm{PMU}(90°, \phi_{nn})\right|$



O algoritmo ESPRIT (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*) difere do MUSIC na medida em que o ESPRIT efetua a eigendecomposição de uma matriz de covariância formada a partir dos vetores de tensões $\underline{V_{Tx}}[n]$ e $\underline{V_{Ty}}[n]$ respectivos a dois sub-*arrays* idênticos – ver (A) abaixo. Os sub-*arrays* são idênticos no sentido de que os elementos dos dois sub-*arrays* formam pares casados com um vetor de deslocamento idêntico, de tal forma que o segundo elemento de cada par é deslocado da mesma distância e na mesma direção em relação ao primeiro elemento do par.



Isso, no entanto, não significa que seja necessário ter dois *arrays* separados. A geometria do *array* apenas deve ser tal que os elementos possam ser selecionados de modo a ter a propriedade referida no parágrafo anterior. Por exemplo, um ULA de K dipolos idênticos com um espaçamento s entre dipolos pode ser pensado como dois sub-*arrays* 1 *e* 2 superpostos formados cada um por $K-1$ dipolos estando o sub-*array* 1 separado do sub-*array* 2 de uma distância s, conforme mostrados em (A).

A onda EM em magenta em (A) incide no ULA sob um DOA (θ_m, ϕ_m). Portanto, o ℓ-ésimo par de tensões casadas entre o sub-*array* 1 e o sub-*array* 2, cada uma delas proveniente respectivamente dos vetores $\underline{V_{Tx}}[n]$ e $\underline{V_{Ty}}[n]$, mantém a seguinte relação baseada no *steering vector* da onda EM incidente:

$$V_{Tx_\ell}[n] = V_{Ty_\ell}[n] e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(s \sin\theta_m \cos\phi_m)} \qquad (31)$$

onde $\ell = 0,1,\cdots,K-2$ (lembre que o ULA tem K dipolos, mas cada *sub-array* tem $K-1$ dipolos).

No caso do ULA em (A), basicamente o que o algoritmo ESPRIT faz é resolver para ϕ_m o sistema de equações (31) a partir dos $K-1$ pares casados nos vetores de tensão $\underline{V_{Tx}}[n]$ e $\underline{V_{Ty}}[n]$.

ESPRIT - *Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*

O procedimento a seguir resolve (31) para ϕ_m através de dois métodos: O TLS-ESPRIT (*Total Least Squares* ESPRIT) e o LS-ESPRIT (*Least Squares* ESPRIT). O TLS-ESPRIT apresenta uma precisão um pouco melhor do que o LS-ESPRIT, às custas de uma maior complexidade computacional.

O vetor das tensões nos terminais dos K dipolos do ULA é dado pela equação (20) do slide 13, abaixo reproduzida:

$$\underline{V_T}[n] = \begin{bmatrix} V_{T_0}[n] \\ V_{T_1}[n] \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}}[n] \end{bmatrix} = \frac{Z_T}{(Z_T + Z_A)} \mathbf{Cpl\ SvM} \begin{bmatrix} E_{0_0}[n] \\ E_{0_1}[n] \\ \vdots \\ E_{0_{M-1}}[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_0[n] \\ \eta_1[n] \\ \vdots \\ \eta_{K-1}[n] \end{bmatrix} \tag{20}$$

Primeiramente, a partir da geometria do *array*, o processamento digital do RX compensa o acoplamento mútuo entre os dipolos através de:

$$\underline{V_T}[n] = \mathbf{Cpl}^{-1} \underline{V_T}[n] \tag{32}$$

As sequências de tensões $\underline{V_{Tx}}[n]$ e $\underline{V_{Ty}}[n]$ nos terminais dos dipolos respectivamente dos sub-*arrays* 1 e 2 são obtidas de (20) conforme abaixo:

$$\underline{V_{Tx}}[n] = \begin{bmatrix} V_{T_0}[n] \\ V_{T_1}[n] \\ \vdots \\ V_{T_{K-2}}[n] \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$\underline{V_{Ty}}[n] = \begin{bmatrix} V_{T_1}[n] \\ V_{T_2}[n] \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}}[n] \end{bmatrix} \tag{34}$$

Daí o RX forma a sequência de vetores $\underline{V_{Tz}}[n]$ a partir de (33) e (34) , “empilhando” $\underline{V_{Tx}}[n]$ e $\underline{V_{Ty}}[n]$:

$$\underline{V_{Tz}}[n] = \begin{bmatrix} \underline{V_{Tx}}[n] \\ \underline{V_{Ty}}[n] \end{bmatrix} \tag{35}$$

Para uma sequência de $NSmpl$ vetores $\underline{V_{Tz}}[n]$, com $n = 0,1 \cdots NSmpl - 1$, a matriz de covariância $\boldsymbol{CovZ}$ $[2(K-1) \times 2(K-1)]$ da sequência $\underline{V_{Tz}}[n]$ é obtida através de :

$$\underline{V_{mz}} = \frac{1}{NSmpl} \sum_{n=0}^{NSmpl-1} \underline{V_{Tz}}[n] \tag{36}$$

$$\boldsymbol{CovZ} = \frac{1}{NSmpl} \sum_{n=0}^{NSmpl-1} \left(\underline{V_{Tz}}[n] - \underline{V_{mz}}\right)\left(\underline{V_{Tz}}[n] - \underline{V_{mz}}\right)^H \tag{37}$$

Os $2(K-1)$ *eigenvalues* (autovalores) e os $2(K-1)$ respectivos *eigenvectors* (autovetores) da matriz de covariância $\boldsymbol{CovZ}$ são determinados, resultando:

$$\begin{bmatrix} \lambda z_0 \\ \lambda z_1 \\ \vdots \\ \lambda z_{2(K-1)-1} \end{bmatrix} = \text{eigenvals}(\boldsymbol{CovZ}) \tag{38}$$

$$\mathbf{UZ} = \begin{bmatrix} UZ_{00} & UZ_{01} & & \cdots & UZ_{0(2(K-1)-1)} \\ UZ_{10} & UZ_{11} & & \cdots & UZ_{1(2(K-1)-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ UZ_{(2(K-1)-1)0} & UZ_{(2(K-1)-1)1} & \cdots & & UZ_{(2(K-1)-1)(2(K-1)-1)} \end{bmatrix} = [\underline{UZ_0} \quad \underline{UZ_1} \quad \cdots \quad \underline{UZ_{(2(K-1)-1)}}] = \tag{39}$$
$$= \text{eigenvec}(\boldsymbol{CovZ})$$

onde a k-ésima coluna $\underline{U_k}$ da matriz $\mathbf{UZ}[2(K-1) \times 2(K-1)]$ é o autovetor $\underline{UZ_k} = \begin{bmatrix} U_{0k} \\ U_{1k} \\ \vdots \\ U_{(2(K-1)-1)k} \end{bmatrix}$ associado ao autovalor λ_k, sendo $k = 0,1 \cdots 2(K-1) - 1$.

O próximo passo consiste em selecionar as M colunas na matriz $\boldsymbol{UZ}$ correspondentes aos M *signal eigenvectors* da matriz $\boldsymbol{CovZ}$, formando a matriz $\mathbf{Es}$ $[2(K-1)\times M]$ cujas M colunas são os M *signal eigenvectors* selecionados. A seleção dos M *signal eigenvectors* é feita a partir do espectro de autovalores da matriz $\boldsymbol{CovZ}$: O m-ésimo *signal eigenvector* de $\boldsymbol{CovZ}$ é identificado pelo autovalor λ_m associado, de valor significativo dentre os demais autovalores presentes no espectro de autovalores da matriz $\boldsymbol{CovZ}$. Já um *noise eigenvector* de $\boldsymbol{CovZ}$ é identificado pelo autovalor λ_ℓ associado que é muito menor que os autovalores λ_m associados aos *signal eigenvectors*, sendo $m = 0,1\cdots M-1$ e $\ell = M, M+1\cdots 2(K-1)-1$, onde M o número de ondas EM que incidem no ULA (rever discussão nos slides 15 e 16).

A partir de $\mathbf{Es}$, formar as submatrizes $\mathbf{Ux}$ e $\mathbf{Uy}$ através de:

$$\mathbf{Ux} = \mathrm{submatrix}\left(\mathbf{Es}, 0, \mathrm{floor}\left(\frac{\mathrm{rows}(\mathbf{Es})}{2}\right) - 1, 0\,, \mathrm{cols}(\mathbf{Es}) - 1\right) \tag{40}$$

$$\mathbf{Uy} = \mathrm{submatrix}\left(\mathbf{Es}, \mathrm{floor}\left(\frac{\mathrm{rows}(\mathbf{Es})}{2}\right), \mathrm{rows}(\mathbf{Es}) - 1\,, 0\,, \mathrm{cols}(\mathbf{Es}) - 1\right) \tag{41}$$

onde

$\mathrm{submatrix}(\mathbf{A}, ir, jr, ic, jc)$ é o operador que retorna a submatriz formada pelas linhas de ir à jr e pelas colunas de ic à jc da matriz $\mathbf{A}$.

$\mathrm{floor}(.)$ é o operador que retorna o maior inteiro que é menor ou igual ao argumento $(.)$.

$\mathrm{rows}(\mathbf{A})$ é o operador que retorna o número de linhas na matriz $\mathbf{A}$.

$\mathrm{cols}(\mathbf{A})$ é o operador que retorna o número de colunas na matriz $\mathbf{A}$.

LS-ESPRIT:

Formar a matriz $\mathbf{\Psi}[M \times M]$ dada por:

$$\mathbf{\Psi} = (\mathbf{Ux}^H\mathbf{Ux})^{-1}\mathbf{Ux}^H\mathbf{Uy} \tag{42}$$

Determinar os M autovalores de valor complexo da matriz $\mathbf{\Psi}$:

$$\begin{bmatrix} \lambda\psi_0 \\ \lambda\psi_1 \\ \vdots \\ \lambda\psi_{M-1} \end{bmatrix} = \mathrm{eigenvals}(\mathbf{\Psi}) \tag{43}$$

Determinar os M DOAs ϕ_m , com $m = 0{,}1 \cdots M-1$, através de:

$$\phi_m = \mathrm{acos}\left(c\,\frac{\angle\lambda\psi_m}{2\pi f s}\right) \tag{44}$$

onde $c = 2.997925 \times 10^8$ [m/s], f é a frequência de operação do ULA e s é o espaçamento entre os K dipolos do ULA.

TLS-ESPRIT:

A partir das submatrizes $\mathbf{Ux}$ e $\mathbf{Uy}$ dadas por (40) e (41), formar a matriz $\mathbf{Vs}[2M \times 2M]$ dada por:

$$\mathbf{Vs} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ux}^H \\ \mathbf{Uy}^H \end{bmatrix} [\mathbf{Ux} \quad \mathbf{Uy}] \tag{45}$$

Determinar a matriz $\mathbf{Vv}[2M \times 2M]$ cujas colunas são os $2M$ autovetores de $\mathbf{Vs}$:

$$\mathbf{Vv} = \begin{bmatrix} Vv_{00} & Vv_{01} & & \cdots & Vv_{0(2M-1)} \\ Vv_{10} & VvZ_{11} & & \cdots & Vv_{1(2M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Vv_{(2M-1)0} & Vv_{(2M-1)1} & \cdots & & Vv_{(2M-1)(2M-1)} \end{bmatrix} = [\underline{Vv}_0 \quad \underline{Vv}_1 \quad \cdots \quad \underline{Vv}_{(2M-1)}] = \mathrm{eigenvec}(\mathbf{Vv}) \tag{46}$$

A partir de $\mathbf{Vv}$, formar as submatrizes $\mathbf{V12}[M \times M]$ e $\mathbf{V22}[M \times M]$ através de:

$$\mathbf{V12} = \mathrm{submatrix}\left(\mathbf{Vv}, 0, \frac{\mathrm{rows}(\mathbf{Vv})}{2} - 1, \frac{\mathrm{cols}(\mathbf{Vv})}{2}, \mathrm{cols}(\mathbf{Vv}) - 1\right) \tag{47}$$

$$\mathbf{V22} = \mathrm{submatrix}\left(\mathbf{Vv}, \frac{\mathrm{rows}(\mathbf{Vv})}{2}, \mathrm{rows}(\mathbf{Vv}) - 1\,, \frac{\mathrm{cols}(\mathbf{Vv})}{2}, \mathrm{cols}(\mathbf{Vv}) - 1\right) \tag{48}$$

Formar a matriz $\mathbf{\Psi}[M \times M]$ dada por:

$$\mathbf{\Psi} = -\mathbf{V12}\, \boldsymbol{V22}^{-1} \tag{49}$$

Determinar os M autovalores de valor complexo da matriz $\mathbf{\Psi}$:

$$\begin{bmatrix} \lambda\psi_0 \\ \lambda\psi_1 \\ \vdots \\ \lambda\psi_{M-1} \end{bmatrix} = \mathrm{eigenvals}(\mathbf{\Psi}) \tag{50}$$

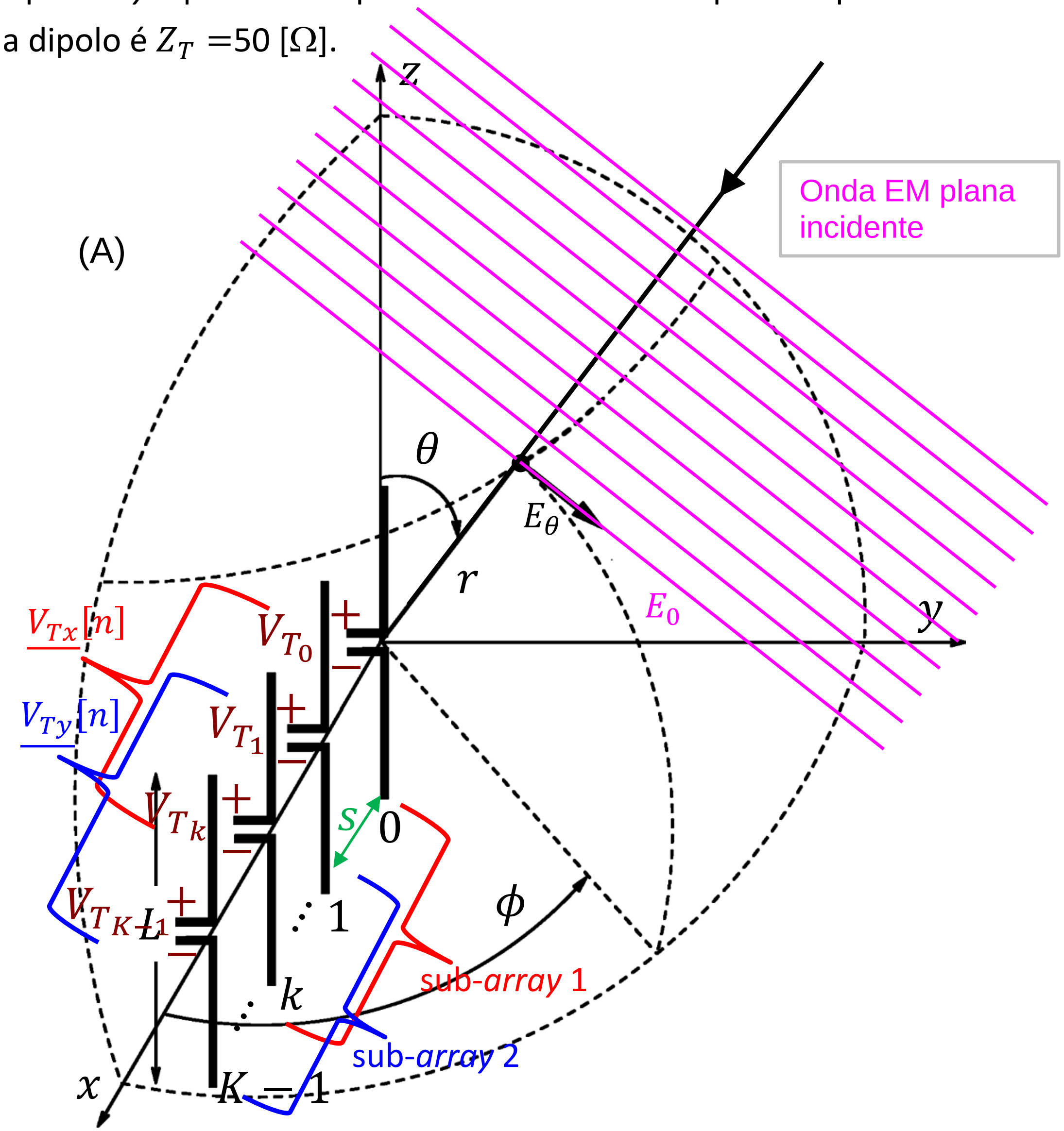
Determinar os M DOAs ϕ_m , com $m = 0{,}1 \cdots M - 1$, através de:

$$\phi_m = \mathrm{acos}\left(c\,\frac{\angle\lambda\psi_m}{2\pi f s}\right) \tag{51}$$

onde $c = 2.997925 \times 10^8$ [m/s], f é a frequência de operação do ULA e s é o espaçamento entre os K dipolos do ULA.

Exemplo 3: Consideremos o *phased-array* do tipo *Uniform Linear Array* (ULA) mostrado em (A), operando em f_o = 850MHz e constituído por 6 dipolos cilíndricos de tamanho L = 0.5λ e de raio *a*=5mm, separados entre si de *s*=0.5λ, sendo λ o comprimento de onda em f_o. O plano *xy* é paralelo ao plano do solo de modo que os dipolos são verticalmente polarizados. A impedância de carga de cada dipolo é Z_T =50 [Ω].

(A)



ESPRIT - *Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*

Um conjunto de ondas EM originadas em transmissores localizados em coordenadas distintas incidem no ULA com amplitudes Mag relativas e DOAs (θ, ϕ) conforme tabela em (A). Os transmissores utilizam modulação 16-QAM com um alfabeto da modulação dado pelo mapa IQSymbolMap em (B) , sendo cada um dos 16 símbolos IQ em IQSymbolMap mapeado em uma palavra de 4 bits (ver https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapIV.pdf).

(A)

Mag:	DOA θ:	DOA ϕ:
1.0	80°	150°
0.7	85°	70°
0.5	90°	20°

(B)

$$\mathrm{IQSymbolMap} = \begin{pmatrix} -3+3i & -1+3i & 1+3i & 3+3i \\ -3+i & -1+i & 1+i & 3+i \\ -3-i & -1-i & 1-i & 3-i \\ -3-3i & -1-3i & 1-3i & 3-3i \end{pmatrix}$$

Para efeito de eficiência espectral, como é usual em qualquer sistema digital, os transmissores adotam um *scrambler* na entrada do modulador (*energy dispersal scrambler* - ver https://en.wikipedia.org/wiki/Scrambler) que torna aleatória e uniforme a distribuição dos símbolos IQ na sequência de símbolos IQ extraídos do mapa IQSymbolMap em função da sequência de palavras binárias de 4 bits na entrada do *scrambler*, sequência que corresponde à informação digital a ser transmitida pelo transmissor.

As tensões nos terminais dos 6 dipolos resultantes da incidência das ondas EM são digitalizadas e convertidas para banda-base pelos respectivos receptores (RX) do *array* de dipolos e são armazenadas no vetor $\underline{V_T}[n] = \begin{bmatrix} V_{T_0}[n] \\ V_{T_1}[n] \\ \vdots \\ V_{T_5}[n] \end{bmatrix}$.

Uma sequência de $NSmpl = 2000$ vetores $\underline{V_T}[n]$, $n = 0,1 \cdots NSmpl - 1$, é processada pelo algoritmo ESPRIT para efeito de determinar o DOA ϕ das ondas EM incidentes.

Pede-se: (a) Determine as sequências de vetores $\underline{V_{Tx}}[n]$ e $\underline{V_{Ty}}[n]$ geradas respectivamente nos terminais dos dipolos do sub-*array* 1 e nos terminais dos dipolos do sub-*array* 2, conforme mostrado em (A) no slide 56. **(b)** Forme a sequência $\underline{V_{Tz}}[n] = \begin{bmatrix} \underline{V_{Tx}}[n] \\ \underline{V_{Ty}}[n] \end{bmatrix}$, determine a matriz de covariância $\boldsymbol{CovZ}$ da sequência $\underline{V_{Tz}}[n]$, efetue a sua *eigen*-decomposição e determine os autovetores de sinal. **(c)** Utilizando o algoritmo **LS-ESPRIT** determine os DOAs (θ_m, ϕ_m) das M ondas EM que incidem no *array,* com $m = 0,1 \cdots M-1$. **(d)** Utilizando o algoritmo **TLS-ESPRIT** determine os DOAs (θ_m, ϕ_m) das M ondas EM que incidem no *array* e compare com os resultados obtidos em (c).

O *script* do software MathCad utilizado na solução deste exemplo está disponível em http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/E3S56 (ESPRIT_ULA6D_DOAPhy)_R1.zip.

Solução:

$f := 850 \cdot \mathrm{MHz}$ → freqüência de operação $\lambda := \frac{c}{f}$ $\lambda = 0.353\mathrm{m}$ → comprimento de onda da onda eletromagnética

$ZT := 50 \cdot \Omega$ → impedância de carga de cada um dos 6 dipolos do array

$SNR := 15$ [dB] → Relação sinal-ruído no canal de transmissão

$NSmpl := 2000$ → Número de amostras em banda-base (símbolos IQ) recebidas por dipolo

DOAs (θ,ϕ) e magnitude relativa Mag das ondas EM planas que incidem no ULA moduladas em 16-QAM:

$$DOA := \begin{pmatrix} 80 \cdot ° & 150 \cdot ° \\ 85 \cdot ° & 70 \cdot ° \\ 90 \cdot ° & 20 \cdot ° \end{pmatrix} \qquad Mag := \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.7 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

→ amplitudes das ondas EM são distintas em razão das condições de propagação distintas no canal de transmissão

$M := \mathrm{rows}(DOA) = 3$ → Número de ondas EM planas que incidem no ULA.

$L := 0.5 \cdot \lambda$ → tamanho dos dipolos

$R := 5 \cdot \mathrm{mm}$ → raio do dipolo cilíndrico

$s := 0.5 \cdot \lambda$ → espaçamento entre dipolos

$\beta := \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = 17.815 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ → constante de propagação da onda EM

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 2 \cdot s & 0 & 0 \\ 3 \cdot s & 0 & 0 \\ 4 \cdot s & 0 & 0 \\ 5 \cdot s & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.176 & 0 & 0 \\ 0.353 & 0 & 0 \\ 0.529 & 0 & 0 \\ 0.705 & 0 & 0 \\ 0.882 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$

→ coordenadas do centro de cada um dos 6 dipolos do ULA .

$K := \mathrm{rows}(C) = 6$ → número de dipolos do *array*

(a) Matriz impedância entre os dipolos do *array*:

$$aa := 0..K-1 \quad bb := 0..K-1 \qquad D_{aa,bb} := \sqrt{\left[\left(C^{\langle 0\rangle}\right)_{aa} - \left(C^{\langle 0\rangle}\right)_{bb}\right]^2 + \left[\left(C^{\langle 1\rangle}\right)_{aa} - \left(C^{\langle 1\rangle}\right)_{bb}\right]^2 + \left[\left(C^{\langle 2\rangle}\right)_{aa} - \left(C^{\langle 2\rangle}\right)_{bb}\right]^2}$$

$$Z_{aa,bb} := \mathrm{if}\left(aa = bb, \mathrm{Zin\_Schelkunoff}\left(\frac{R}{mm}, \frac{\lambda}{m}, \frac{L}{m}\right), \mathrm{ZMutual\_Schelkunoff}\left(\frac{L}{m}, \frac{L}{m}, \frac{R}{mm}, \frac{R}{mm}, \frac{D_{aa,bb}}{m}, \frac{\lambda}{m}\right)\right)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 78.517+45.679i & -14.447-34.501i & 4.624+20.452i & -2.176-14.184i & 1.25+10.795i & -0.808-8.696i \\ -14.447-34.501i & 78.517+45.679i & -14.447-34.501i & 4.624+20.452i & -2.176-14.184i & 1.25+10.795i \\ 4.624+20.452i & -14.447-34.501i & 78.517+45.679i & -14.447-34.501i & 4.624+20.452i & -2.176-14.184i \\ -2.176-14.184i & 4.624+20.452i & -14.447-34.501i & 78.517+45.679i & -14.447-34.501i & 4.624+20.452i \\ 1.25+10.795i & -2.176-14.184i & 4.624+20.452i & -14.447-34.501i & 78.517+45.679i & -14.447-34.501i \\ -0.808-8.696i & 1.25+10.795i & -2.176-14.184i & 4.624+20.452i & -14.447-34.501i & 78.517+45.679i \end{pmatrix} \cdot \Omega$$

Steering vector Sv(θ,ϕ) - equação (16) do slide 12 do Cap II.6:

$$Sv(\theta,\phi) := \frac{\lambda}{\pi \cdot \sin\left(\frac{\beta \cdot L}{2}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\beta \cdot L}{2} \cdot \cos(\theta)\right) - \cos\left(\frac{\beta \cdot L}{2}\right)}{\sin(\theta)} \cdot \begin{bmatrix} e^{j\cdot\left[\beta\cdot\left(\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\cdot C_{0,0}+\sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot C_{0,1}+\cos(\theta)\cdot C_{0,2}\right)\right]} \\ e^{j\cdot\left[\beta\cdot\left(\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\cdot C_{1,0}+\sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot C_{1,1}+\cos(\theta)\cdot C_{1,2}\right)\right]} \\ e^{j\cdot\left[\beta\cdot\left(\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\cdot C_{2,0}+\sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot C_{2,1}+\cos(\theta)\cdot C_{2,2}\right)\right]} \\ e^{j\cdot\left[\beta\cdot\left(\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\cdot C_{3,0}+\sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot C_{3,1}+\cos(\theta)\cdot C_{3,2}\right)\right]} \\ e^{j\cdot\left[\beta\cdot\left(\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\cdot C_{4,0}+\sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot C_{4,1}+\cos(\theta)\cdot C_{4,2}\right)\right]} \\ e^{j\cdot\left[\beta\cdot\left(\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\cdot C_{5,0}+\sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot C_{5,1}+\cos(\theta)\cdot C_{5,2}\right)\right]} \end{bmatrix}$$

Matriz do acoplamento Cpl - equação (15) do slide 12 do Cap II.6:

$ZA := Z_{0,0}$ → impedância própria dos $K = 6$ dipolos do ULA

$$Cpl := (ZT + ZA)\cdot(Z + ZT\cdot\text{identity}(K))^{-1}$$

$$Cpl = \begin{pmatrix} 0.993 + 0.089i & 0.161 + 0.18i & -0.073 - 0.048i & 0.045 + 0.023i & -0.032 - 0.015i & 0.026 + 0.016i \\ 0.161 + 0.18i & 0.991 + 0.147i & 0.157 + 0.161i & -0.07 - 0.038i & 0.043 + 0.017i & -0.032 - 0.015i \\ -0.073 - 0.048i & 0.157 + 0.161i & 0.993 + 0.153i & 0.155 + 0.158i & -0.07 - 0.038i & 0.045 + 0.023i \\ 0.045 + 0.023i & -0.07 - 0.038i & 0.155 + 0.158i & 0.993 + 0.153i & 0.157 + 0.161i & -0.073 - 0.048i \\ -0.032 - 0.015i & 0.043 + 0.017i & -0.07 - 0.038i & 0.157 + 0.161i & 0.991 + 0.147i & 0.161 + 0.18i \\ 0.026 + 0.016i & -0.032 - 0.015i & 0.045 + 0.023i & -0.073 - 0.048i & 0.161 + 0.18i & 0.993 + 0.089i \end{pmatrix}$$

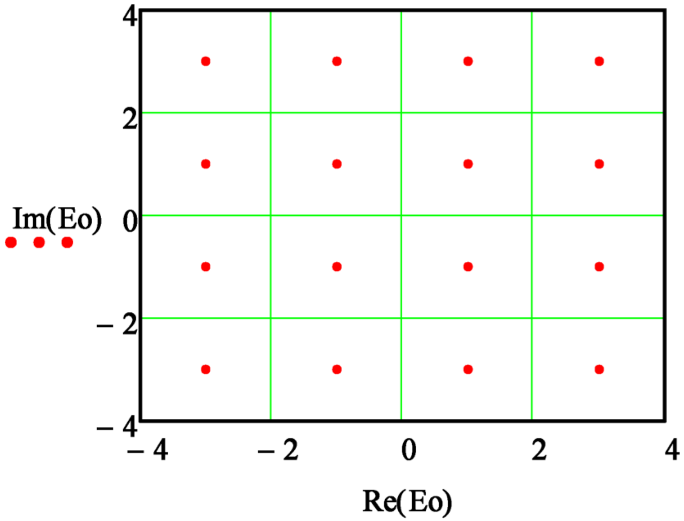
Constelação 16-QAM do sinal transportado por cada onda EM:

$$A := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad ii := 0..3 \qquad jj := 0..3 \qquad IQSymbolMap_{ii,jj} := A_{3-jj} + j\cdot A_{ii}$$

$$IQSymbolMap = \begin{pmatrix} -3 + 3i & -1 + 3i & 1 + 3i & 3 + 3i \\ -3 + i & -1 + i & 1 + i & 3 + i \\ -3 - i & -1 - i & 1 - i & 3 - i \\ -3 - 3i & -1 - 3i & 1 - 3i & 3 - 3i \end{pmatrix}$$

Geração da sequência de amostras em banda-base transportadas pelas $M = 3$ ondas EM planas que incidem no ULA moduladas pela sequência de $NSmpl = 2000$ símbolos IQ 16-QAM:

$n := 0..NSmpl - 1$ $\quad$ $\_m := 0..M - 1$ $\quad$ $Eo_{\_m,n} := IQSymbolMap_{round(rnd(3)),\,round(rnd(3))} \cdot \frac{V}{m}$



→ constelação de símbolos IQ 16-QAM gerada nos $M = 3$ TXs que dão origem às respectivas ondas EM moduladas pelas respectivas sequências de símbolos IQ.

Amplitude de cada onda EM: $\quad Eo_{\_m,n} := Mag_{\_m} \cdot Eo_{\_m,n}$

Sequência de amostras em banda-base transportadas por cada uma das $M = 3$ ondas EM planas que incidem no ULA :

Eo =

	0	1	2	3	4	5
0	-1+i	3-3i	-1-i	-1+i	-1+i	1-i
1	-2.1+0.7i	0.7-0.7i	-2.1+0.7i	0.7-0.7i	0.7-0.7i	2.1-0.7i
2	1.5+0.5i	0.5-0.5i	0.5-0.5i	-0.5+0.5i	-0.5+0.5i	...

$\cdot \frac{V}{m}$

$SvM^{\langle \_m \rangle} := Sv\left(DOA_{\_m,0}, DOA_{\_m,1}\right)$ → matriz de *steering vectors* - equação (18) do slide 13 do Cap II.6

$VT := \frac{ZT}{ZT + ZA} \cdot Cpl \cdot SvM \cdot Eo$ → VT é o vetor em que cada componente é a sequência de amostras da tensão digitalizada em banda-base nos terminais do repectivo dipolo - equação (17) do slide 13 do Cap II.6.

Adicionando às tensões do vetor VT o ruído gaussiano do canal de modo que a relação sina-ruído seja $SNR = 15$ [dB]:

$VT := AWGN(VT, SNR)$ → equação (20) do slide 13 do Cap II.6

Compensando o acoplamento mútuo entre os dipolos no processamento digital do RX:

$VT\_ := Cpl^{-1} \cdot VT \quad VT := VT\_$ → equação (32) do slide 51 do Cap II.7

Determinando as sequências de vetores $VTx^{\langle n \rangle}$ e $VTy^{\langle n \rangle}$ respectivas ao sub-array 1 e ao sub-array 2:

$VTx := submatrix(VT, 0, rows(VT) - 2, 0, cols(VT) - 1)$ → **equação (33) do slide 51 do Cap II.7**

VTx = (·mV)

	0	1	2
0	-31.895+90.884i	105.723-259.786i	-132.252+1.776i
1	-78.371-20.116i	-146.311+147.776i	-17.164+28.672i
2	-19.265-119.697i	218.349-50.058i	-44.008-155.886i
3	85.713+11.374i	-192.581+29.796i	55.661+17.014i
4	63.505-38.114i	103.082+69.376i	...

$VTy := \text{submatrix}(VT, 1, \text{rows}(VT) - 1, 0, \text{cols}(VT) - 1)$ → **equação (34) do slide 51 do Cap II.7**

$VTy =$ (·mV)

	0	1	2
0	-78.371-20.116i	-146.311+147.776i	-17.164+28.672i
1	-19.265-119.697i	218.349-50.058i	-44.008-155.886i
2	85.713+11.374i	-192.581+29.796i	55.661+17.014i
3	63.505-38.114i	103.082+69.376i	135.843-27.572i
4	17.399+197.295i	-68.036-170.907i	...

(b) Formando a sequência de vetores $VTz^{\langle n \rangle}$:

$VTz := \text{stack}(VTx, VTy)$ → equação (35) do slide 51 do Cap II.7

$VTz =$ (V)

	0	1	2
0	-0.032+0.091i	0.106-0.26i	-0.132+1.776i·10^-3
1	-0.078-0.02i	-0.146+0.148i	-0.017+0.029i
2	-0.019-0.12i	0.218-0.05i	-0.044-0.156i
3	0.086+0.011i	-0.193+0.03i	0.056+0.017i
4	0.064-0.038i	0.103+0.069i	0.136-0.028i
5	-0.078-0.02i	-0.146+0.148i	-0.017+0.029i
6	-0.019-0.12i	0.218-0.05i	-0.044-0.156i
7	0.086+0.011i	-0.193+0.03i	0.056+0.017i
8	0.064-0.038i	0.103+0.069i	0.136-0.028i
9	0.017+0.197i	-0.068-0.171i	...

Construindo a matriz de covariância CovZ da sequência de vetores $\mathrm{VTz}^{\langle n \rangle}$:

$$\mathrm{Vmz} := \frac{1}{\mathrm{NSmpl}} \cdot \sum_{n=0}^{\mathrm{NSmpl}-1} \mathrm{VTz}^{\langle n \rangle} = \begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 0 & 0.778-1.331i \\ 1 & 0.636+1.925i \\ 2 & -0.955-0.626i \\ 3 & -1.258+1.737i \\ 4 & -0.25-2.893i \\ 5 & 0.636+1.925i \\ 6 & -0.955-0.626i \\ 7 & -1.258+1.737i \\ 8 & -0.25-2.893i \\ 9 & -0.084+0.242i \end{array} \cdot \mathrm{mV}$$

→ Vetor média Vmz da sequência de vetores $\mathrm{VTz}^{\langle n \rangle}$ - equação (36) do slide 52 do Cap II.7

Extraindo o vetor média Vmz da sequência de vetores $\mathrm{VTz}^{\langle n \rangle}$:

$$\mathrm{VTz}^{\langle n \rangle} := \mathrm{VTz}^{\langle n \rangle} - \mathrm{Vmz}$$

Matriz de covariância CovZ da sequência de vetores $\mathrm{VTz}^{\langle n \rangle}$:

$$\mathrm{CovZ} := \frac{1}{\mathrm{NSmpl}} \cdot \sum_{n=0}^{\mathrm{NSmpl}-1} \left[\left(\mathrm{VTz}^{\langle n \rangle} \right) \cdot \left(\overline{\mathrm{VTz}^{\langle n \rangle}} \right)^{T} \right]$$

→ equação (37) do slide 52 do Cap II.7

$$10^3 \cdot \mathrm{CovZ} = \begin{pmatrix} 21.33 & -10.8-0.56i & 6.78-13.32i & -10.82+10.44i & -3.43-3.83i & -10.8-0.56i & 6.78-13.32i & -10.82+10.44i & -3.43-3.83i & 9.61+10.92i \\ -10.8+0.56i & 20.8 & -10.58-0.35i & 6.63-13.06i & -10.38+9.99i & 20.8 & -10.58-0.35i & 6.63-13.06i & -10.38+9.99i & -3.53-3.72i \\ 6.78+13.32i & -10.58+0.35i & 21.22 & -11.1-0.91i & 6.91-12.95i & -10.58+0.35i & 21.22 & -11.1-0.91i & 6.91-12.95i & -10.89+10.24i \\ -10.82-10.44i & 6.63+13.06i & -11.1+0.91i & 21.59 & -10.71-0.33i & 6.63+13.06i & -11.1+0.91i & 21.59 & -10.71-0.33i & 7.06-13.59i \\ -3.43+3.83i & -10.38-9.99i & 6.91+12.95i & -10.71+0.33i & 20.93 & -10.38-9.99i & 6.91+12.95i & -10.71+0.33i & 20.93 & -10.96-0.43i \\ -10.8+0.56i & 20.8 & -10.58-0.35i & 6.63-13.06i & -10.38+9.99i & 20.8 & -10.58-0.35i & 6.63-13.06i & -10.38+9.99i & -3.53-3.72i \\ 6.78+13.32i & -10.58+0.35i & 21.22 & -11.1-0.91i & 6.91-12.95i & -10.58+0.35i & 21.22 & -11.1-0.91i & 6.91-12.95i & -10.89+10.24i \\ -10.82-10.44i & 6.63+13.06i & -11.1+0.91i & 21.59 & -10.71-0.33i & 6.63+13.06i & -11.1+0.91i & 21.59 & -10.71-0.33i & 7.06-13.59i \\ -3.43+3.83i & -10.38-9.99i & 6.91+12.95i & -10.71+0.33i & 20.93 & -10.38-9.99i & 6.91+12.95i & -10.71+0.33i & 20.93 & -10.96-0.43i \\ 9.61-10.92i & -3.53+3.72i & -10.89-10.24i & 7.06+13.59i & -10.96+0.43i & -3.53+3.72i & -10.89-10.24i & 7.06+13.59i & -10.96+0.43i & 21.62 \end{pmatrix} \cdot V^2$$

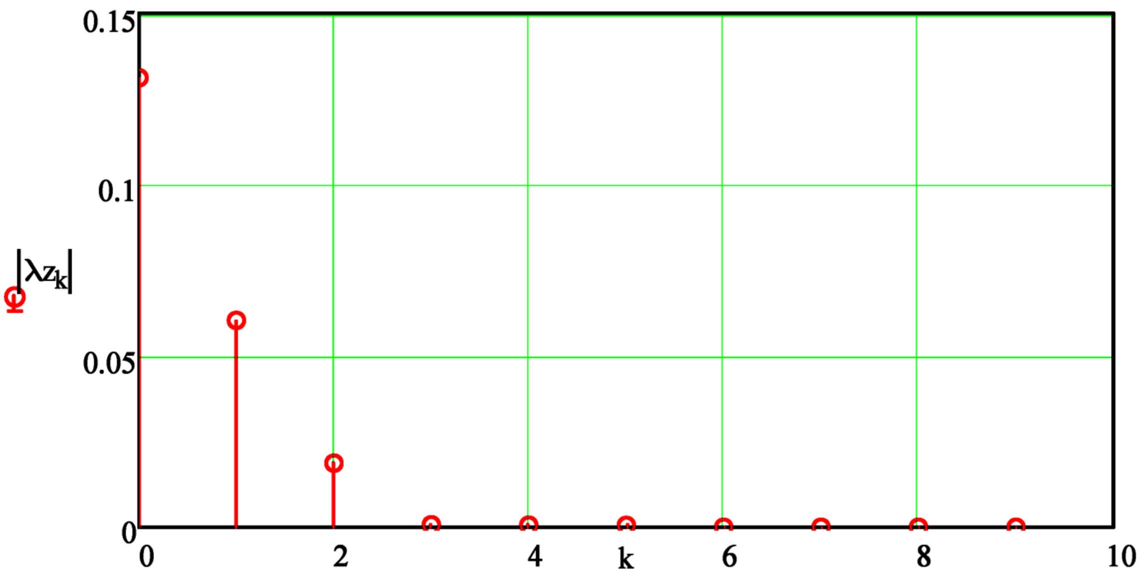
Autovalores λz_k da matriz CovZ: $k := 0 .. \mathrm{rows}(\mathrm{CovZ}) - 1$ $\quad ka := 0 .. \mathrm{cols}(\mathrm{CovZ}) - 1$

$\lambda z_k := \mathrm{eigenvals}(\mathrm{CovZ})_{\mathrm{rows}(\mathrm{CovZ})-k-1} \rightarrow 10^3 \cdot \lambda z =$

	0
0	131.148
1	60.306
2	18.724
3	0.721
4	0.582
5	0.538
6	$-3.14 \cdot 10^{-15}$
7	$-1.274i \cdot 10^{-15}$
8	0
9	0

$\cdot V^2$ → equação (38) do slide 52 do Cap II.7

Gráfico do espectro de autovalores λz_k. Note os primeiros $\text{NsignalEigV} := 3$ valores de λz_k significativos, o que indica haver $\text{NsignalEigV} = 3$ *signal eigevectors* e portanto $\text{NsignalEigV} = 3$ sinais incidentes (ajustar manualmente o valor de NsignalEigV no início do parágrafo acima a partir da inspeção visual do gráfico do espectro de autovalores λ_k abaixo - ver discussão nos slides 15 e 16 do Cap II.6).



Autovetores $UZ^{\langle k \rangle}$ da matriz CovZ (equação (39) do slide 52 do Cap II.7):

$$UZ_{k,ka} := \text{eigenvec}\left(CovZ, \lambda z_{ka}\right)_k \quad \rightarrow$$

$$UZ = \begin{pmatrix}
0.113 - 0.26i & -0.327 - 0.057i & 0.327 + 0.31i & -0.227 - 0.217i & 0.104 - 0.533i & 0.2 + 0.416i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.227 + 0.213i & -0.053 - 0.317i & -0.132 - 0.274i & 0.067 + 0.204i & 0.213 - 0.244i & 0.22 + 0.089i & 0.018 + 1.672i \times 10^{-7} & 0.018 - 2.558i \times 10^{-7} & 0.018 - 2.794i \times 10^{-9} & 0.018 + 8.97i \times 10^{-10} \\
0.31 - 0.118i & 0.226 - 0.202i & 0.187 + 0.149i & 0.294 + 0.246i & -0.039 + 0.059i & 0.296 - 0.034i & -0.119 - 1.058i \times 10^{-6} & -0.119 + 1.641i \times 10^{-6} & -0.119 + 5.783i \times 10^{-8} & -0.119 - 2.537i \times 10^{-8} \\
-0.336 + 5.702i \times 10^{-3} & 0.284 + 0.104i & -0.14 + 0.193i & 0.233 - 0.319i & -0.084 - 0.032i & 0.243 + 0.123i & 0.044 + 6.275i \times 10^{-7} & 0.044 - 6.105i \times 10^{-7} & 0.044 - 1.313i \times 10^{-8} & 0.044 - 2.073i \times 10^{-7} \\
0.294 + 0.11i & 0.08 + 0.309i & 0.04 - 0.302i & 0.015 - 0.239i & 0.307 - 6.234i \times 10^{-3} & 0.233 - 0.026i & 0.695 + 6.634i \times 10^{-6} & 0.695 - 1.037i \times 10^{-5} & 0.695 + 2.073i \times 10^{-7} & 0.695 - 2.073i \times 10^{-7} \\
-0.227 + 0.213i & -0.053 - 0.317i & -0.132 - 0.274i & 0.067 + 0.204i & 0.213 - 0.244i & 0.22 + 0.089i & -0.018 - 1.672i \times 10^{-7} & -0.018 + 2.558i \times 10^{-7} & -0.018 + 2.794i \times 10^{-9} & -0.018 - 8.97i \times 10^{-10} \\
0.31 - 0.118i & 0.226 - 0.202i & 0.187 + 0.149i & 0.294 + 0.246i & -0.039 + 0.059i & 0.296 - 0.034i & 0.119 + 1.058i \times 10^{-6} & 0.119 - 1.641i \times 10^{-6} & 0.119 - 5.783i \times 10^{-8} & 0.119 + 2.537i \times 10^{-8} \\
-0.336 + 5.702i \times 10^{-3} & 0.284 + 0.104i & -0.14 + 0.193i & 0.233 - 0.319i & -0.084 - 0.032i & 0.243 + 0.123i & -0.044 - 6.275i \times 10^{-7} & -0.044 + 6.105i \times 10^{-7} & -0.044 + 1.313i \times 10^{-8} & -0.044 + 2.073i \times 10^{-7} \\
0.294 + 0.11i & 0.08 + 0.309i & 0.04 - 0.302i & 0.015 - 0.239i & 0.307 - 6.234i \times 10^{-3} & 0.233 - 0.026i & -0.695 - 6.634i \times 10^{-6} & -0.695 + 1.037i \times 10^{-5} & -0.695 - 2.073i \times 10^{-7} & -0.695 + 2.073i \times 10^{-7} \\
-0.204 - 0.2i & -0.282 + 0.184i & -0.212 + 0.391i & -0.186 + 0.231i & 0.452 + 0.275i & 0.375 - 0.313i & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Obtendo os *signal eigenvectors* Es (autovetores com autovalor associado de valor significativo):

endcol := NsignalEigV − 1 = 2 → indice das colunas de UZ onde terminam os *signal eigenvectors*

$$\mathrm{Es} := \mathrm{submatrix}(\mathrm{UZ},0,\mathrm{rows}(\mathrm{UZ})-1,0,\mathrm{endcol}) = \begin{pmatrix} 0.113-0.26i & -0.327-0.057i & 0.327+0.31i \\ -0.227+0.213i & -0.053-0.317i & -0.132-0.274i \\ 0.31-0.118i & 0.226-0.202i & 0.187+0.149i \\ -0.336+5.702i\times10^{-3} & 0.284+0.104i & -0.14+0.193i \\ 0.294+0.11i & 0.08+0.309i & 0.04-0.302i \\ -0.227+0.213i & -0.053-0.317i & -0.132-0.274i \\ 0.31-0.118i & 0.226-0.202i & 0.187+0.149i \\ -0.336+5.702i\times10^{-3} & 0.284+0.104i & -0.14+0.193i \\ 0.294+0.11i & 0.08+0.309i & 0.04-0.302i \\ -0.204-0.2i & -0.282+0.184i & -0.212+0.391i \end{pmatrix}$$

(c) LS-ESPRIT:

$$U x := \text{submatrix}\left(Es, 0, \text{floor}\left(\frac{\text{rows}(Es)}{2}\right) - 1, 0, \text{cols}(Es) - 1\right) = \begin{pmatrix} 0.113 - 0.26i & -0.327 - 0.057i & 0.327 + 0.31i \\ -0.227 + 0.213i & -0.053 - 0.317i & -0.132 - 0.274i \\ 0.31 - 0.118i & 0.226 - 0.202i & 0.187 + 0.149i \\ -0.336 + 5.702i \times 10^{-3} & 0.284 + 0.104i & -0.14 + 0.193i \\ 0.294 + 0.11i & 0.08 + 0.309i & 0.04 - 0.302i \end{pmatrix}$$

(equação (40) do slide 53 do Cap II.7)

$$U y := \text{submatrix}\left(Es, \text{floor}\left(\frac{\text{rows}(Es)}{2}\right), \text{rows}(Es) - 1, 0, \text{cols}(Es) - 1\right) = \begin{pmatrix} -0.227 + 0.213i & -0.053 - 0.317i & -0.132 - 0.274i \\ 0.31 - 0.118i & 0.226 - 0.202i & 0.187 + 0.149i \\ -0.336 + 5.702i \times 10^{-3} & 0.284 + 0.104i & -0.14 + 0.193i \\ 0.294 + 0.11i & 0.08 + 0.309i & 0.04 - 0.302i \\ -0.204 - 0.2i & -0.282 + 0.184i & -0.212 + 0.391i \end{pmatrix}$$

(equação (41) do slide 53 do Cap II.7)

$$\psi := \left[\left(\overline{Ux}\right)^T \cdot Ux\right]^{-1} \cdot \left[\left(\overline{Ux}\right)^T \cdot Uy\right] = \begin{pmatrix} -0.906 - 0.372i & -0.065 + 0.015i & -0.097 + 0.534i \\ 4.54\times10^{-3} + 7.872i\times10^{-3} & 0.45 + 0.864i & -0.219 + 0.356i \\ -0.01 + 0.079i & 0.041 - 0.114i & -0.941 + 0.127i \end{pmatrix}$$

→ equação (42) do slide 54 do Cap II.7

$$\psi := \mathrm{if}(\mathrm{cols}(\psi) = 0, \mathrm{identity}(1)\cdot\psi, \psi) \qquad m := 0 .. \mathrm{rows}(\psi) - 1$$

$$\lambda\psi_m := \mathrm{eigenvals}(\psi)_{\mathrm{rows}(\psi)-m-1} \rightarrow \lambda\psi = \begin{pmatrix} -0.893 - 0.447i \\ -0.983 + 0.191i \\ 0.479 + 0.877i \end{pmatrix}$$

→ equação (43) do slide 54 do Cap II.7

(θ_m, ϕ_m)

$$LS\_DOA\phi_m := \mathrm{acos}\left(c\cdot\frac{\arg\left(\lambda\psi_m\right)}{2\cdot\pi\cdot f\cdot s}\right) \rightarrow LS\_DOA\phi = \begin{pmatrix} 148.453 \\ 20.104 \\ 70.066 \end{pmatrix}\cdot° \Leftrightarrow DOA = \begin{pmatrix} 80 & 150 \\ 85 & 70 \\ 90 & 20 \end{pmatrix}\cdot°$$

(equação (44) do slide 54 do Cap II.7)

(d) TLS-ESPRIT:

$$Vs := \mathrm{stack}\left[\left(\overline{Ux}\right)^T, \left(\overline{Uy}\right)^T\right] \cdot \mathrm{augment}(Ux, Uy)$$ → equação (45) do slide 54 do Cap II.7

$$10^3 \cdot Vs = \begin{pmatrix} 499.241 & -21.45 + 1.376i & -4.276 + 121.105i & -462.076 - 187.226i & -29.805 - 5.101i & -55.768 + 144.214i \\ -21.45 - 1.376i & 498.352 & -128.181 - 5.926i & 22.98 + 3.126i & 219.692 + 444.922i & 14.914 + 155.159i \\ -4.276 - 121.105i & -128.181 + 5.926i & 502.59 & -46.928 + 149.87i & -40.307 - 157.499i & -381.955 + 26.476i \\ -462.076 + 187.226i & 22.98 - 3.126i & -46.928 - 149.87i & 500.759 & 21.45 - 1.376i & 4.276 - 121.105i \\ -29.805 + 5.101i & 219.692 - 444.922i & -40.307 + 157.499i & 21.45 + 1.376i & 501.648 & 128.181 + 5.926i \\ -55.768 - 144.214i & 14.914 - 155.159i & -381.955 - 26.476i & 4.276 + 121.105i & 128.181 - 5.926i & 497.41 \end{pmatrix}$$

$k := 0 .. \mathrm{rows}(Vs) - 1 \qquad ka := 0 .. \mathrm{rows}(Vs) - 1$

$$\lambda Vs_k := \mathrm{eigenvals}(Vs)_{\mathrm{rows}(Vs)-k-1} \quad \rightarrow \quad \lambda Vs = \begin{pmatrix} 1.079 \\ 1.186 \\ 0.735 \\ 8.421 \times 10^{-5} \\ 0 \\ 1.501 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$Vv_{k,ka} := \text{eigenvec}\left(Vs, \lambda Vs_{ka}\right)k$$ → equação (46) do slide 54 do Cap II.7

$$Vv = \begin{pmatrix} -0.415+0.502i & -0.125-0.097i & -0.098-0.082i & 0.1-0.207i & 0.495+0.477i & 0.073+0.063i \\ -0.15+0.071i & 0.22+0.5i & 0.288+0.269i & 0.016-0.442i & -0.08+0.049i & -0.219-0.515i \\ 0.198+0.093i & -0.338-0.249i & 0.57+0.061i & 0.549+0.069i & 0.062-0.034i & -0.368+0.021i \\ 0.195-0.624i & 0.138+0.072i & 0.122-8.91i\times 10^{-3} & 2.628\times 10^{-3}+0.101i & 0.651+0.277i & 0.059-0.138i \\ 0.026+0.161i & 0.553-5.903i\times 10^{-3} & 0.383-0.054i & 0.31-0.012i & -0.012-0.109i & 0.614+0.182i \\ 0.193+0.098i & 0.377+0.165i & -0.531-0.231i & 0.571+0.111i & 0.02+0.015i & -0.321-0.081i \end{pmatrix}$$

$$V12 := \text{submatrix}\left(Vv, 0, \frac{\text{rows}(Vv)}{2}-1, \frac{\text{cols}(Vv)}{2}, \text{cols}(Vv)-1\right) = \begin{pmatrix} 0.1-0.207i & 0.495+0.477i & 0.073+0.063i \\ 0.016-0.442i & -0.08+0.049i & -0.219-0.515i \\ 0.549+0.069i & 0.062-0.034i & -0.368+0.021i \end{pmatrix}$$

(equação (47) do slide 55 do Cap II.7)

$$V22 := \text{submatrix}\left(Vv, \frac{\text{rows}(Vv)}{2}, \text{rows}(Vv)-1, \frac{\text{cols}(Vv)}{2}, \text{cols}(Vv)-1\right) = \begin{pmatrix} 0+0.101i & 0.651+0.277i & 0.059-0.138i \\ 0.31-0.012i & -0.012-0.109i & 0.614+0.182i \\ 0.571+0.111i & 0.02+0.015i & -0.321-0.081i \end{pmatrix}$$

(equação (48) do slide 55 do Cap II.7)

$$\psi := -V12\cdot V22^{-1} = \begin{pmatrix} -0.906-0.372i & -0.065+0.015i & -0.097+0.534i \\ 4.532\times 10^{-3}+7.875i\times 10^{-3} & 0.45+0.865i & -0.219+0.356i \\ -0.01+0.079i & 0.041-0.114i & -0.941+0.127i \end{pmatrix}$$ → equação (49) do slide 55 do Cap II.7

$\psi := \text{if}(\text{cols}(\psi) = 0, \text{identity}(1)\cdot\psi, \psi)$ $\qquad m := 0 .. \text{rows}(\psi) - 1$

$$\lambda\psi_m := \text{eigenvals}(\psi)_{\text{rows}(\psi)-m-1} \rightarrow \lambda\psi = \begin{pmatrix} -0.893 - 0.447i \\ -0.983 + 0.191i \\ 0.479 + 0.877i \end{pmatrix}$$

→ equação (50) do slide 55 do Cap II.7

$$TLS\_DOA\phi_m := \text{acos}\left(c\cdot\frac{\arg(\lambda\psi_m)}{2\cdot\pi\cdot f\cdot s}\right) \rightarrow TLS\_DOA\phi = \begin{pmatrix} 148.453 \\ 20.105 \\ 70.065 \end{pmatrix}\cdot° \Leftrightarrow DOA = \begin{array}{c} (\theta_m, \phi_m) \\ \begin{pmatrix} 80 & 150 \\ 85 & 70 \\ 90 & 20 \end{pmatrix}\cdot° \end{array}$$

(equação (51) do slide 55 do Cap II.7)

$$\Uparrow\Downarrow$$

$$LS\_DOA\phi = \begin{pmatrix} 148.453 \\ 20.104 \\ 70.066 \end{pmatrix}\cdot°$$

Note a menor precisão para a onda EM que incide sob $\theta = 80°$. De fato, quanto mais a incidência se aproximar da direção do zênite do ULA ($\theta = 0°$), menor será a precisão devido ao ganho nulo dos dipolos para $\theta = 0°$.

Apêndice A – Bibliografia

1. Direction Finding in the Presence of Mutual Coupling - Svantesson - Chalmers - 1999
2. Antennas and Propagation from a Signal Processing Perspective - Svantesson - Chalmers - 2001
3. Comparison of MUSIC and ESPRIT for Direction of Arrival Estimation of Jamming Signal - Hong - 2012 IEEE International Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceedings
4. ESPRIT-Estimation of Signal Parameters Via Rotational Invariance Techniques - R. Roy & T. Kailath - IEEE TRANSACTIONS ON ACOUSTICS, SPEECH AND SIGNAL PROCESSING. VOL 37. NO 7. JULY 1989
5. Direction-of-Arrival Estimation for Wide-Band Signals Using the ESPRIT Algorithm - B. Ottersten & T. Kailath - IEEE TRANSACTIONS ON ACOUSTICS, SPEECH, AND SIGNAL PROCESSING, VOL. 38, NO. 2, FEBRUARY 1990 317